Prova 1 - Grupos Clássicos - 20/10/2023 - **Solução**.

(1) (1 ponto) Determine o centralizador de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ em $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Considere a igualdade

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Reformulando

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Segue que $b = -b$ e $c = -c$, ou seja $b = c = 0$ (são números reais). Segue que

$$C_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot b \neq 0 \right\}.$$

(2) (1 ponto) Mostre que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ não são isomorfos.

O centro de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ é $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$, o centro de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ é $\{\lambda\mathbb{1} \ : \ 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$. No primeiro caso o centro é finito, no segundo caso o centro é infinito. Logo os dois grupos não são isomorfos (grupos isomorfos têm centros isomorfos). Uma outra possibilidade é observar que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ é perfeito (como visto nas aulas teóricas) mas $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ não é perfeito, pois $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$.

(3) (1 ponto) Mostre que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$.

A composição entre a inclusão e a projeção

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$$

tem núcleo igual ao centro de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pelo teorema de isomorfismo, obtemos um homomorfismo injetivo

$$f : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}).$$

Se trata do homomorfismo que envia a classe de $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ módulo o centro de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ para a classe de A módulo o centro de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Falta mostrar que é sobrejetivo. Se $B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ então seja $d := \det(B) \neq 0$, assim podemos escrever $d = b^2$ para um oportuno $b \in \mathbb{C}$ (pois em $\mathbb{C}$ todo elemento admite uma raíz quadrada). Segue que $b^{-1}B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, de fato

$$\det(b^{-1}B) = (b^{-1})^2 \det(B) = d^{-1}d = 1.$$

A classe de B em $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ é obviamente igual à classe de $b^{-1}B$. Logo $f(\overline{b^{-1}B}) = \overline{B}$.

(4) (2 pontos) Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre o corpo F. Defina a seguinte forma bilinear simétrica $V \times V \to F$.

$$B : V \times V \to F, \qquad B(X, Y) := \mathrm{Tr}(X \cdot Y)$$

onde $\mathrm{Tr}(A)$ é o traço (a soma dos elementos diagonais) da matriz A.

(a) Seja e_{ij} a matriz 2×2 que tem 1 na posição (i, j) e 0 nas outras posições. Sejam $A_1 = e_{11}$, $A_2 = e_{12}$, $A_3 = e_{21}$, $A_4 = e_{22}$. Calcule $B(A_i, A_j)$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Temos

$$B(A_1, A_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$B(A_1, A_2) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_1, A_3) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_1, A_4) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_2, A_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_2, A_3) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$B(A_2, A_4) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_3, A_3) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_3, A_4) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B(A_4, A_4) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Segue que a matriz da forma é $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Suponha $F = \mathbb{F}_5$. Mostre que o índice de Witt é 2.

Um vetor (x, y, z, w) é isotrópico se e somente se $x^2 + 2yz + w^2 = 0$. Segue que os vetores $(1, y, z, 1)$ são isotrópicos se $yz = -1$. Sejam $u = (1, 1, -1, 1)$, $w = (1, 2, 1, 0)$, são isotrópicos e ortogonais, logo $\langle u, w\rangle$ é totalmente isotrópico e o índice de Witt é 2. Explicitamente, o seguinte é um subespaço totalmente isotrópico de dimensão 2.

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(5) (1 ponto) Seja B uma forma bilinear alternada não degenerada definida no espaço vetorial V. Se U, W são subespaços não degenerados de V, $U \cap W$ é não degenerado? Se sim, demonstre. Se não, encontre um contra-exemplo.

A resposta é não. Considere a base simplética $e_1, \ldots, e_m$, $f_1, \ldots, f_m$. Sejam $U := \langle e_1, f_1\rangle$, $W := \langle e_1, e_2 + f_1\rangle$, assim $U \cap W = \langle e_1\rangle$ é totalmente isotrópico, logo é degenerado. Por outro lado U e W são não degenerados pois a forma restrita a U e a W é (com respeito às bases dadas) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nos dois casos.

(6) (1 ponto) Sejam $F = \mathbb{F}_7$, $V = F^2$. Diga se a forma simétrica $B(u, v) := u^t \cdot v$, definida em V, admite vetores isotrópicos.

Não pois um vetor $(x, y) \neq (0, 0)$ é isotrópico se e somente se $x^2 + y^2 = 0$, e a equação $x^2 + y^2 = 0$ admite $(0, 0)$ como única solução em $\mathbb{F}_7^2$. De fato, se por exemplo $x \neq 0$, então poderiamos multiplicar por x^{-2} obtendo $1 + (yx^{-1})^2 = 0$, ou seja $(yx^{-1})^2 = -1$, e em $\mathbb{F}_7$ não tem nenhum elemento cujo quadrado é $-1 = 6$, pois $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$, $(\pm 2)^2 = 4$, $(\pm 3)^2 = 2$.

(7) (3 pontos) Seja $G = \mathrm{Sp}(V)$ o grupo simplético associado à forma bilinear alternada não degenerada B. Dado $v \in V$, defina o estabilizador de v em G como sendo $\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G \ : \ g(v) = v\}$.

(a) Suponha $n = 4$. Determine uma base do espaço $\langle e_1 + f_2 \rangle^\perp$.
Seja $W = \langle e_1 + f_2 \rangle$. A equação que define $W^\perp$ é

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ou seja $y = z$. Segue que uma base de $W^\perp$ é $\{e_1, f_2, e_2 + f_1\}$.

(b) Seja $g \in \mathrm{Stab}_G(e_1)$. Mostre que $g(f_1) - f_1 \in \langle e_1 \rangle^\perp$.
Usando que $g(e_1) = e_1$ e que g é isometria, temos

$$\begin{aligned} B(g(f_1) - f_1, e_1) &= B(g(f_1), e_1) - B(f_1, e_1) \\ &= B(g(f_1), g(e_1)) - B(f_1, e_1) \\ &= B(f_1, e_1) - B(f_1, e_1) = 0 \end{aligned}$$

logo $g(f_1) - f_1 \in \langle e_1 \rangle^\perp$.

(c) É verdade que $\mathrm{Stab}_G(e_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Stab}_G(e_m) = \{1\}$?
Não. Uma matriz X de G (escrita usando a base simplética usual) que pertence à interseção acima tem a forma $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ e satisfaz $X^t J X = J$ onde $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$. Segue que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A^t & B^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A^t & B^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B \\ -\mathbb{1} & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^t & A^t B - B^t A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Segue que $B = \mathbb{1}$ e $A^t = A$. Por exemplo escolhendo $A = \mathbb{1}$ obtemos uma matriz $\mathbb{1} \neq X \in G$ que pertence à interseção $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Stab}_G(e_i)$. Explicitamente, o correspondente elemento $g \in G$ faz $e_i \mapsto e_i$ para todo i e $f_i \mapsto e_i + f_i$ para todo i.

(8) (3 pontos) Sejam $S := \mathrm{Sp}(V)$, $G := \mathrm{GL}(V)$. O dual de V é o conjunto V^* das funções lineares $V \to F$. Uma transveção é um elemento $t = \tau_{u,\varphi} \in G$ definido por $t(v) := v + \varphi(v)u$ onde $0 \neq u \in V$ e $0 \neq \varphi \in V^*$ satisfazem $\varphi(u) = 0$. Lembre-se que $t \in S$ se e somente se $\varphi(v) = a \cdot B(v, u)$ para todo $v \in V$, onde $0 \neq a \in F$.

(a) Dada uma transveção $t = \tau_{u,\varphi}$ e $g \in G$, mostre que gtg^{-1} é uma transveção calculando explicitamente $w \in V$ e $\psi \in V^*$ tais que $gtg^{-1} = \tau_{w,\psi}$.

$gtg^{-1}(v) = g(g^{-1}(v) + \varphi(g^{-1}(v))u) = v + \varphi(g^{-1}(v))g(u)$.

Segue que $gtg^{-1} = \tau_{w,\psi}$ onde $w = g(u)$ e $\psi = \varphi g^{-1}$. Observe que

$$\psi(w) = \varphi g^{-1}(g(u)) = \varphi(u) = 0.$$

Além disso $w = g(u) \neq 0$ (pois $u \neq 0$ e g é bijetiva) e $\psi = \varphi g^{-1} \neq 0$ (pois $\varphi \neq 0$ e g^{-1} é bijetiva).

(b) Um elemento $g \in G$ é uma semelhança se existe $\lambda_g \in F$ tal que $B(g(u), g(v)) = \lambda_g B(u, v)$ para todo $u, v \in V$. Suponha $\dim(V) \geqslant 4$. Existe $g \in G$ que não é uma semelhança?

Sim. Defina g fazendo $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_1$, $f_1 \mapsto f_1$, $f_2 \mapsto f_2$ e $e_i \mapsto e_i$, $f_i \mapsto f_i$ para todo $i \geqslant 3$. Assim $B(g(e_1), g(f_1)) = B(e_2, f_1) = 0$ e $B(e_1, f_1) = 1$, logo g não é uma semelhança. Observe que precisamos da hipótese $n = 2m = \dim(V) \geqslant 4$ para construir o elemento g.

(c) Mostre que S não é normal em G se $\dim(V) \geqslant 4$.

Seja $t = \tau_{\varphi,u} \in S$ a transveção simplética com $u = e_1$, $\varphi(v) = B(v, e_1)$. Então $t(v) = v + B(v, e_1)e_1$ para todo $v \in V$. Seja g o elemento construido no item anterior (que foi construido para $\dim(V) \geqslant 4$). Temos

$$\begin{aligned} gtg^{-1}(v) &= v + \varphi(g^{-1}(v)) \cdot g(e_1) = v + \varphi(g^{-1}(v)) \cdot e_2 \\ &= v + B(g^{-1}(v), e_1) \cdot e_2. \end{aligned}$$

Se $gtg^{-1} \in S$ então existe $b \in F$ tal que

$$B(g^{-1}(v), e_1) = \varphi(g^{-1}(v)) = b \cdot B(v, e_2)$$

para todo $v \in V$. Escolhendo $v = f_1$ obtemos

$$-1 = B(f_1, e_1) = b \cdot B(f_1, e_2) = 0,$$

uma contradição. Segue que $gtg^{-1} \notin S$. Sendo $g \in G$ e $t \in S$, segue que S não é normal em G.

Observe que, se $\dim(V) = 2$, então $\mathrm{Sp}(V) = \mathrm{SL}(V)$ é normal em $\mathrm{GL}(V)$.

Aceitei também os argumentos baseados na simplicidade de $\mathrm{PSL}(V)$.