Prova 2 - Grupos Clássicos (2023-2) - 08/12/2023

Nome e matrícula: ....

F é um corpo cuja característica é diferente de 2 e V é um espaço vetorial sobre F de dimensão finita. Indicaremos com q uma potência de um primo ímpar. No caso em que B é uma forma Hermitiana, temos $B(\lambda u, v) = \lambda B(u,v)$ e $B(u, \lambda v) = \overline{\lambda} B(u,v)$ para $u, v \in V$, $\lambda \in F$.

A nota da prova será o mínimo entre 10 *e a soma dos pontos obtidos.*

(1) (2 pontos) Seja $F = \mathbb{F}_5$ e seja B a forma bilinear simétrica de $V = F^2$ de matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  - (a) Encontre uma base ortogonal de V relativa à forma B.
  - (b) Calcule a ordem do grupo ortogonal $O(V,B)$.

(2) (2 pontos) Considere $V = F^2$ com a forma quadratica $Q(x,y) := xy$.
  - (a) Determine a forma bilinear simétrica associada $B((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ e a sua matriz com respeito à base $(1,0)$, $(0,1)$ de V.
  - (b) Determine todas as matrizes de $\mathrm{SO}(V,Q)$.

(3) (1 ponto) Lembre-se que uma transveção unitária de V (relativa a uma forma Hermitiana não degenerada B) é uma função $t = t_{a,u}$, com $0 \neq a \in F$, $a + \overline{a} = 0$ e $B(u,u) = 0$, definida por $t(v) = v + aB(v,u)u$. Suponha que $F = \mathbb{F}_{q^2}$, $V = F^2$ e B tem matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que $\mathrm{SU}(V,B)$ contém q^2-1 transveções. [Observe que pode acontecer $(a_1,u_1) \neq (a_2,u_2)$ e mesmo assim $t_{a_1,u_1} = t_{a_2,u_2}$.]

(4) (4 pontos) Sejam $F := \mathbb{F}_{q^2}$, e dados $x, y \in F$ sejam

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Seja $G := U(2,F)$ o grupo unitário de $V = F^2$ com a forma Hermitiana B representada pela matriz J.
  - (a) Calcule a ordem de $H = \{A_{x,y} \ : \ x, y \in F, \ A_{x,y} \in G\} \leqslant G$.
  - (b) Seja $A = A_{1,y} \in H$ com $y \neq 0$. Determine a ordem de $C_G(A)$.
  - (c) Mostre que, em G, todas as transveções são conjugadas. [Lembre-se que A tem $|G : C_G(A)|$ conjugados em G.]
  - (d) É verdade que todas as transveções são conjugadas em $\mathrm{SU}(2,F)$?

(5) (1 ponto) Seja $F = \mathbb{F}_{q^2}$ e seja B uma forma Hermitiana não degenerada de $V := F^2$. Seja $G := U(V,B)$ e seja $v \in V$ um vetor tal que $B(v,v) = 1$. Calcule a ordem do grupo $H = \{g \in G \ : \ g(v) = v\}$.

(6) (1 ponto) Seja W um subespaço não degenerado de um espaço V com uma forma bilinear simétrica não degenerada B. Mostre que $O(W, B|_{W \times W})$ é isomorfo a um subgrupo de $O(V,B)$.

(7) (1 ponto) Suponha $q > 3$. Seja $G := \mathrm{SO}(3,q)$ o grupo especial ortogonal de $V = \mathbb{F}_q^3$. Conte os subgrupos normais de G.

Orders of the finite Orthogonal and Unitary groups.

Assume q is odd. The orders of the finite orthogonal groups are (for n odd and even respectively, $\varepsilon = \pm 1$)

$$|O(n,q)| = 2q^{((n-1)/2)^2} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (q^{2i}-1),$$

$$|O^{\varepsilon}(n,q)| = 2q^{n(n-2)/4}(q^{n/2}-\varepsilon) \prod_{i=1}^{n/2-1} (q^{2i}-1).$$

In all cases, $|\operatorname{SO}(V,Q)| = \frac{1}{2}|O(V,Q)|$. The orders of the simple orthogonal groups are (for n odd and even respectively, with $\varepsilon = \pm 1$)

$$|\Omega(n,q)| = |P\Omega(n,q)| = \frac{1}{2}|\operatorname{SO}(n,q)|,$$

$$|P\Omega^{\varepsilon}(n,q)| = \frac{|O^{\varepsilon}(n,q)|}{2(4,q^{n/2}-\varepsilon)} = \frac{|\operatorname{SO}^{\varepsilon}(n,q)|}{(4,q^{n/2}-\varepsilon)}.$$

Theorem 1. *Let Q be a nondegenerate quadratic form of positive Witt index ν on a vector space V of dimension $n \geqslant 3$. Then the factor group of the commutator group of the orthogonal group $O(V,Q)$ with respect to its center is simple except in the cases $n=4, \nu=2$ and $n=3, |F|=3$.*

The orders of the finite unitary groups are

$$|U(n,q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} (q^i - (-1)^i).$$

The special unitary group $\operatorname{SU}(n,q)$ has index $q+1$ in $U(n,q)$ and the scalar matrices in $U(n,q)$ form a subgroup of order $q+1$. Therefore

$$|\operatorname{PU}(n,q)| = |\operatorname{SU}(n,q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i).$$

The scalar matrices in $\operatorname{SU}(n,q)$ form a subgroup of order $d=(n,q+1)$, the greatest common divisor of n and $q+1$. Therefore

$$|\operatorname{PSU}(n,q)| = \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(n,q+1)} \cdot \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i).$$

Theorem 2. *Let $n \geqslant 2$, q a prime power. Then the group $\operatorname{PSU}(n,q)$ is simple if and only if $(n,q) \notin \{(2,2),\ (2,3),\ (3,2)\}$.*