Prova 2 - GRUPOS CLÁSSICOS (2023-2) - 08/12/2023 - Solução

F é um corpo cuja característica é diferente de 2 e V é um espaço vetorial sobre F de dimensão finita. Indicaremos com q uma potência de um primo ímpar. No caso em que B é uma forma Hermitiana, temos $B(\lambda u, v) = \lambda B(u,v)$ e $B(u, \lambda v) = \overline{\lambda} B(u,v)$ para $u, v \in V$, $\lambda \in F$.

(1) (2 pontos) Seja $F = \mathbb{F}_5$ e seja B a forma bilinear simétrica de $V = F^2$ de matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Encontre uma base ortogonal de V relativa à forma B.

(b) Calcule a ordem do grupo ortogonal $O(V, B)$.

Item (a). Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canonica. Como $B(e_1, e_1) = 2$, o vetor $v_1 = e_1$ é anisotrópico. O seu ortogonal é dado pelos vetores $(x, y)^t$ tais que

$$0 = (1,0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + y.$$

Segue que podemos escolher $v_2 = e_1 - 2e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Temos que v_2 é anisotrópico, pois

$$B(v_2, v_2) = (1, -2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 = 1.$$

Logo, a matriz de B na base $\{v_1, v_2\}$ é $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Item (b). A matriz que representa B tem determinante igual a 3, e sabemos que é congruente a uma matriz do tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, assim $d \equiv -3 = 2 \mod K$, onde K é o grupo $\{x^2 : x \in F^*\}$. Como 2 não é um quadrado em F, segue que d não é um quadrado em F, logo $O(V, B) \cong O^-(2, 5)$ tem ordem $2 \cdot (q+1)$ com $q = 5$, ou seja $|O(V, B)| = 12$.

(2) (2 pontos) Considere $V = F^2$ com a forma quadrática $Q(x, y) := xy$.

(a) Determine a forma bilinear simétrica associada $B((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ e a sua matriz com respeito à base $(1, 0)^t$, $(0, 1)^t$ de V.

(b) Determine todas as matrizes de $\mathrm{SO}(V, Q)$.

Item (a). Temos $B(u, v) = Q(u + v) - Q(u) - Q(v)$, logo

$$\begin{aligned} B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= Q\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1. \end{aligned}$$

Segue que a matriz de B com respeito à base canônica é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Item (b). Uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertence a $\mathrm{SO}(V,Q)$ se e somente se $ad - bc = 1$ e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $2 \neq 0$, obtemos que $ac = bd = 0$, $ad + bc = 1$. Lembrando que $ad - bc = 1$, somando essas duas últimas equações obtemos $2ad = 2$, assim $ad = 1$ (pois $2 \neq 0$), assim $a, d \neq 0$ e $ac = bd = 0$ implica que $c = b = 0$. Segue que

$$\mathrm{SO}(V,Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \ : \ a \in F,\ a \neq 0 \right\} \cong F^*.$$

(3) (1 ponto) Lembre-se que uma transveção unitária de V (relativa a uma forma Hermitiana não degenerada B) é uma função $t = t_{a,u}$, com $0 \neq a \in F$, $a + \overline{a} = 0$ e $B(u,u) = 0$, definida por $t(v) = v + aB(v,u)u$. Conte as transveções unitárias de $U(V,B)$ no caso em que $F = \mathbb{F}_{q^2}$, $V = F^2$ e B tem matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [Observe que $(a_1,u_1) \neq (a_2,u_2)$ não implica $t_{a_1,u_1} \neq t_{a_2,u_2}$.]

As transveções t_{a_1,u_1}, t_{a_2,u_2} são iguais se e somente se

$$a_1 B(v,u_1)u_1 = a_2 B(v,u_2)u_2$$

para todo $v \in V$. Escolhendo v tal que $B(v,u_2) \neq 0$ obtemos que $u_2 \in \langle u_1 \rangle$, ou seja existe $\lambda \in F^*$ tal que $u_2 = \lambda u_1$. Substituindo na equação acima deduzimos que $a_1 = a_2 \lambda \overline{\lambda}$. Isso implica que, dada uma transveção t, existem $q^2 - 1$ pares (a,u) (o número de escolhas para λ) tais que $t = t_{a,u}$. Segue que o número de transveções é $(q-1)I/(q^2-1) = I/(q+1)$ onde I é o número de vetores isotrópicos em V.

Um vetor isotrópico tem a forma $(x,y)^t$ com

$$0 = (x,y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \overline{x}y + x\overline{y}.$$

Segue que o número de vetores isotrópicos é

$$I = (q^2-1)q + (q^2-1) = (q^2-1)(q+1).$$

Assim, o número de transveções é $I/(q+1) = q^2 - 1$.

(4) (3 pontos) Sejam $F := \mathbb{F}_{q^2}$, e dados $x, y \in F$ sejam

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Seja $G := U(2,F)$ o grupo unitário de $V = F^2$ com a forma Hermitiana B representada pela matriz J.

(a) Calcule a ordem de $H = \{A_{x,y} \ : \ x, y \in F,\ A_{x,y} \in G\} \leqslant G$.

(b) Seja $A = A_{1,y} \in H$ com $y \neq 0$. Determine a ordem de $C_G(A)$.

(c) Mostre que, em G, todas as transveções são conjugadas. [Lembre-se que A tem $|G : C_G(A)|$ conjugados em G.]

(d) É verdade que todas as transveções são conjugadas em $\mathrm{SU}(2,F)$?

Item (a). A matriz $A_{x,y}$, com $x \neq 0$, pertence a G se e somente se

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{x}x \\ \overline{x}x & \overline{x}y + x\overline{y} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como $\overline{x}x = 1$, temos $q+1$ escolhas para x. Dado um tal x, a equação $\overline{x}y + x\overline{y} = 0$ nos dá q escolhas para y (é o número de escolhas para $z = \overline{x}y$ de traço nulo, pois x e z determinam y). Logo $|H| = q(q+1)$.

Item (b). A condição de comutação é

$$\begin{pmatrix} a & ay+b \\ c & cy+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cy & b+dy \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Segue que $cy = 0$ e $ay = dy$. Como $y \neq 0$, obtemos $c = 0$ e $a = d$. Em outras palavras, $C_G(A)$ coincide com o subgrupo H do item anterior, logo $|C_G(A)| = |H| = q(q+1)$.

Item (c). Pelo item (b), $H = C_G(A)$ tem ordem $q(q+1)$, além disso $|G| = q(q+1)(q^2-1)$, logo $|G : C_G(A)| = q^2 - 1$, ou seja A tem $q^2 - 1$ conjugados em G. Por outro lado, A é uma transveção e os conjugados de A em G são transveções. Como visto no exercício anterior, o número de transveções é $q^2 - 1$. Segue que o conjunto das transveções é igual à classe de conjugação de A em G.

Item (d). Segue do item (b) que o centralizador de $A = A_{1,y}$ em $S = \mathrm{SU}(2,F)$ consiste das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ com $b + \overline{b} = 0$, logo $|C_S(A)| = 2q$. Segue que o número de conjugados de A em S vale $|S : C_S(A)| = q(q^2-1)/(2q) = (q^2-1)/2$, menos que o número de transveções (que é $q^2 - 1$). Logo as transveções não são todas conjugadas em $\mathrm{SU}(2,F)$.

(5) (1 ponto) Seja $F = \mathbb{F}_{q^2}$ e seja B uma forma Hermitiana não degenerada de $V := F^2$. Seja $G := U(V,B)$ e seja $v \in V$ um vetor tal que $B(v,v) = 1$. Calcule a ordem do grupo $H = \{g \in G \ : \ g(v) = v\}$.

Como existe uma base ortonormal, podemos supor que $B(u,v) = u^t\overline{v}$ e que $v = e_1$. Se $g \in H$ então $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Segue que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g^t\overline{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} \\ 0 & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} \\ b & b\overline{b} + d\overline{d} \end{pmatrix}$$

Segue que $b = 0$ e $d\overline{d} = 1$, logo $|H| = q+1$.

(6) (1 ponto) Seja W um subespaço não degenerado de um espaço V com uma forma bilinear simétrica não degenerada B. Mostre que $O(W, B|_{W\times W})$ é isomorfo a um subgrupo de $O(V,B)$.

Sejam $H := O(W, B_{W\times W})$, $G := O(V,B)$. Temos $V = W \perp W^\perp$, logo dado $h \in H$ podemos definir $g = f(h)$ por $g(v) := g(w+u) := h(w) + u$.

Observe que $g \in O(V,B)$, de fato se $v_1, v_2 \in V$, escrevendo $v_i = w_i + u_i$ com $w_i \in W$, $u_i \in W^\perp$ temos

$$\begin{aligned} B(g(v_1), g(v_2)) &= B(g(w_1+u_1), g(w_2+u_2)) = B(h(w_1)+u_1, h(w_2)+u_2) \\ &= B(h(w_1), h(w_2)) + B(h(w_1), u_2) + B(u_1, h(w_2)) + B(u_1, u_2) \\ &= B(w_1, w_2) + B(u_1, u_2) = B(w_1+u_1, w_2+u_2) = B(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Seja $f : H \to G$ definida levando h para $g = f(h)$ definido acima. Se trata de um homomorfismo injetivo de grupos.

(7) (1 ponto) Suponha $q > 3$. Seja $G := \mathrm{SO}(3,q)$ o grupo especial ortogonal de $V = \mathbb{F}_q^3$. Conte os subgrupos normais de G.

Observe que $N = \Omega(3,q)$ é um subgrupo de G de índice 2, e N é simples não abeliano. Além disso $Z(G) = \{1\}$ pois 3 é ímpar, logo G não tem subgrupos de ordem 2 (se $\{1, \varepsilon\}$ fosse um subgrupo de ordem 2, ε estaria no centro de G, contradizendo $Z(G) = \{1\}$). Se K é um subgrupo normal de G então $K \cap N$ é normal em N, assim se K não contém N então $|K| \leqslant 2$, assim $K = \{1\}$. Isso mostra que os únicos subgrupos normais de G são $\{1\}$, N e G.