Segunda prova **IAL Turma C** **21/10/2015**
Tema A **Nome e matricula:**

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   (a) Dê a definição de base e dimensão de um espaço vetorial.

   (b) Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Mostre que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

   (c) Seja $U = [v_1, v_2, v_3] \leq \mathbb{R}^4$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por v_1, v_2, v_3. Calcule a dimensão de U.

   (d) Seja $v_4 = v_1 - v_2 + 2v_3$. Diga se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, justificando a resposta.

2. **Exercício 2 [2.5 pontos]**

   Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   Seja $U = [v_1, v_2, v_3, v_4] \leq \mathbb{R}^4$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por v_1, v_2, v_3, v_4.

   (a) Encontre uma base de U.

   (b) Encontre uma base de $U^\perp$.

3. **Exercício 3 [3 pontos]**

   Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.
   Temos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do espaço vetorial $U = [v_1, v_2, v_3]$.

   (a) Usando o algoritmo de Gram-Schmidt, encontre uma base ortogonal de U.

   (b) Seja $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e seja $W = [v_1, v_2]$ o espaço gerado por v_1, v_2. Encontre a projeção ortogonal de b sobre W.

4. **Exercício 4 [1.5 pontos]**

   Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V (assim V tem dimensão 3). Seja $v \in V$. Supomos que $v \cdot v_1 = 0$, $v \cdot v_2 = 0$ e $v \cdot v_3 = 0$. Mostre que $v = 0$.

   (Dica: basta mostrar que $v \cdot v = 0$).

21/10/2015

Solução Prova 2 Tema A IAL turma C

1. (a) Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ tal que

(•) $\{v_1, \dots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V, isto é, todo $v \in V$ é uma combinação linear $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ com $a_1, \dots, a_n$ escalares.

(•) $\{v_1, \dots, v_m\}$ é linearmente independente, isto é, se $a_1, \dots, a_n$ são escalares tais que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_m = 0$ então $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$.

A dimensão do espaço V é o numero de elementos de uma base de V (sabemos pela teoria que as bases de V têm o mesmo número de elementos)

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, em $\mathbb{R}^4$.

Mostramos que eles são linearmente independentes. Sejam a, b, c escalares com $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, precisamos mostrar que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b+c \\ -2a+5b \\ 4a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ -2a + 5b = 0 \\ \underbrace{4a}_{=0} + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + \overset{=0}{c} = 0 \\ 5b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \square$$

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

(c) $U = [v_1, v_2, v_3] \leq \mathbb{R}^4$.

$\dim(U)$ = número de elementos de uma base de U. (def).

Então temos que achar uma base de U e contar os elementos dela.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto gerador de U (pela definição de U) e é linearmente independente pelo item (b) $\Rightarrow$ é uma base de U (pela definição de base). Ele tem 3 elementos: v_1, v_2, v_3

$\Rightarrow \dim(U) = 3$.

(d) $v_4 = v_1 - v_2 + 2v_3$. $\Rightarrow v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4 = 0$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente dependente

$\Rightarrow$ não é uma base de $\mathbb{R}^4$

(uma base é um conjunto gerador lin. ind.!)

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(a) Base de U: escrevemos os quatro vetores em linhas formando uma matriz e reduzamola.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & 16 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 13 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ uma base de U é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $U^\perp$ é o espaço-solução do sistema linear de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & 16 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{redução} \\ \text{(já feita)}}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(coluna sem pivot) t (parametro)

Parametro: $x_4 = t$.

$7x_3 - 2t = 0 \rightarrow x_3 = 2t/7$

$2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_4 =$

$= -2t/7 - 3/2\, t = -\frac{25}{14}t$

$x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2\left(-\frac{25}{14}t\right) + \frac{6t}{7} - 2t =$

$= \frac{31t}{7} - 2t = \frac{17t}{7} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17t/7 \\ -25/14\, t \\ 2t/7 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 17/7 \\ -25/14 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Base de $U^\perp$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 17/7 \\ -25/14 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $U = [v_1, v_2, v_3]$.

(a) Aplicamos o algoritmo de Gram-Schmidt.

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

R: Base ortogonal
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\42\\9\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1\cdot v_3}{u_1\cdot u_1}u_1 - \frac{u_2\cdot v_3}{u_2\cdot u_2}u_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{21}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix} =$$

(escolho um multiplo dele)

$$= \begin{pmatrix}-4/21 + 1/3\\1\\8/21 - 1/6\\1 - 16/21 - \cancel{1/6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/21\\1\\9/42\\3/42\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}6\\42\\9\\3\end{pmatrix}$$

(b) $b = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\6\end{pmatrix}$, $W = [v_1, v_2] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$.

Projeção ortogonal de b sobre W =

$= P = A(A^TA)^{-1}A^Tb$ onde $A = \begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\-2&1\\4&1\end{pmatrix}$.

$$A^TA = \begin{pmatrix}1&0&-2&4\\-2&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\-2&1\\4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21&0\\0&6\end{pmatrix}.$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix}1/21&0\\0&1/6\end{pmatrix}$$

$$p = A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\-2&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/21&0\\0&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2&4\\-2&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\6\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1/21&-1/3\\0&0\\-2/21&1/6\\4/21&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\5\end{pmatrix}. \Rightarrow P = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

(4) Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V, e $v \in V$, existem escalares a, b, c tais que

$av_1 + bv_2 + cv_3 = v \Rightarrow$

$v\cdot v = v\cdot(av_1 + bv_2 + cv_3) = a\overbrace{(v\cdot v_1)}^{=0} + b\overbrace{(v\cdot v_2)}^{=0} + c\overbrace{(v\cdot v_3)}^{=0} = 0$

$\Rightarrow v\cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$ (sabemos pela teoria).

Segunda prova **IAL Turma C** **21/10/2015**
Tema B **Nome e matricula:**

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   (a) Dê a definição de base e dimensão de um espaço vetorial.

   (b) Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Mostre que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

   (c) Seja $U = [v_1, v_2, v_3] \leq \mathbb{R}^4$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por v_1, v_2, v_3. Calcule a dimensão de U.

   (d) Seja $v_4 = -v_1 + 2v_2 + v_3$. Diga se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, justificando a resposta.

2. **Exercício 2 [2.5 pontos]**

   Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   Seja $U = [v_1, v_2, v_3, v_4] \leq \mathbb{R}^4$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por v_1, v_2, v_3, v_4.

   (a) Encontre uma base de U.

   (b) Encontre uma base de $U^\perp$.

3. **Exercício 3 [3 pontos]**

   Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.
   Temos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do espaço vetorial $U = [v_1, v_2, v_3]$.

   (a) Usando o algoritmo de Gram-Schmidt, encontre uma base ortogonal de U.

   (b) Seja $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e seja $W = [v_1, v_2]$ o espaço gerado por v_1, v_2. Encontre a projeção ortogonal de b sobre W.

4. **Exercício 4 [1.5 pontos]**

   Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V (assim V tem dimensão 3). Seja $v \in V$. Supomos que $v \cdot v_1 = 0$, $v \cdot v_2 = 0$ e $v \cdot v_3 = 0$. Mostre que $v = 0$.

   (Dica: basta mostrar que $v \cdot v = 0$).

Solução Prova 2 Tema B IAL Turma C

(1) (a) Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ tal que

(·) $\{v_1, \dots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V, isto é, todo $v \in V$ é uma combinação linear $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_m$, com $a_1, \dots, a_n$ escolares.

(·) $\{v_1, \dots, v_m\}$ é linearmente independente, isto é, se $a_1, \dots, a_n$ são escolares tais que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_m = 0$ então $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$.

A dimensão do espaço V é o numero de elementos de uma base de V; sabemos pela teoria que todas as bases de V têm o mesmo número de elementos.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^4$.

Mostremos que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes. $a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \rightarrow$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b+c \\ 4a+c \\ -2a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ 4a+c = 0 \\ -2a+5b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 0 \\ 5b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

(/ /)

ⓒ $U = [v_1, v_2, v_3] \leq \mathbb{R}^4$. $\dim(U)$ = número de elementos de uma base de U (pela definição de dimensão). Então temos que achar uma base de U e contar os elementos dela.
$\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto gerador de U (pela definição de U) e é linearmente independente pelo item ⓑ $\Rightarrow$ é uma base de U (pela definição de base). Ela tem 3 elementos: v_1, v_2, v_3
$\Rightarrow \dim(U) = 3$.

ⓓ $v_4 = -v_1 + 2v_2 + v_3$. Diga se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. Temos $-v_1 + 2v_2 + v_3 - v_4 = 0$
$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente dependente.
$\Rightarrow$ não é uma base de $\mathbb{R}^4$.
(Uma base é um conjunto gerador lin ind!)

② $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$U = [v_1, v_2, v_3, v_4] \leq \mathbb{R}^4$

ⓐ Base de U: escrevemos os quatro vetores em linhas formando uma matriz e reduzamola.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-\text{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Uma base de U é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

(/ /)

(b) Base de $U^\perp$. $U^\perp$ é o espaço-solução do sistema linear de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(já feita)}]{\text{redução}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \boxed{2} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

coluna sem pivot ⇝ parametro t

Parametro : $x_4 = t$

$7x_3 - 2x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = 2t/7$

$2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -\frac{2t}{7} - \frac{3}{2}t = -\frac{25t}{14}$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 =$

$= -2\left(-{}^{25t}/_{14}\right) + 3\left({}^{2t}/_{7}\right) - 2t = {}^{31t}/_{7} - 2t = {}^{17t}/_{7}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17t/7 \\ -25t/14 \\ 2t/7 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 17/7 \\ -25/14 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Uma base de $U^\perp$ é $\left\{\begin{pmatrix} 17/7 \\ -25/14 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(3) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^4$.

⇝ $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do espaço vetorial $U = [v_1, v_2, v_3]$

(a) Usando G-S encontramos uma base de U.

$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. $u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$u_3 = v_3 - \frac{u_1 \cdot v_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -4/21 + 1/3 \\ 8/21 - 1/6 \\ 1 - 16/21 - 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/21 \\ 9/42 \\ 3/42 \end{pmatrix}$ ⇝ escolho $u_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(multiplico por 42)

⇝ Uma base ortogonal de U é $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

(b) $b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\6\end{pmatrix}$, $W=[v_1,v_2]=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$.

Projeção ortogonal de b sobre $W = p = A(A^TA)^{-1}A^Tb$

onde

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&-2\\-2&1\\4&1\end{pmatrix} \; ; \; A^T=\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&-2&1&1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&-2\\-2&1\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&0\\0&6\end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}1/21&0\\0&1/6\end{pmatrix}.$$

$$p=A(A^TA)^{-1}A^Tb=\begin{pmatrix}0&0\\1&-2\\-2&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/21&0\\0&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\1/21&-1/3\\-2/21&1/6\\4/21&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\5\end{pmatrix} \rightarrow$$ A proj ort de b sobre W é $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

(4) Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V e $v\in V$ existem escalares a, b, c tais que

$v = av_1+bv_2+cv_3 \Rightarrow$

$v\cdot v = v\cdot(av_1+bv_2+cv_3) = a\underbrace{(v\cdot v_1)}_{=0}+b\underbrace{(v\cdot v_2)}_{=0}+$
$+c\underbrace{(v\cdot v_3)}_{=0} = 0+0+0=0$

$\Rightarrow v\cdot v=0 \Rightarrow v=0$ (pela teoria).