Terceira prova **IAL Turma C** **25/11/2015**
Tema A **Nome e matricula:**

1. **Exercício 1 [4 pontos]**. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 5z \\ 5(x+y+z) \end{pmatrix}$$

   (a) (0,75 pontos) Escreva a matriz A da transformação linear T.

   (b) (0,75 pontos) Diga se T é injetora e/ou sobrejetora e/ou um isomorfismo linear, justificando as respostas.

   (c) (0,75 pontos) Calcule a dimensão do núcleo e da imagem de T, justificando as respostas.

   (d) (0,75 pontos) Encontre uma base de $\ker(T)$ (o núcleo de T) e uma base de $Im(T)$ (a imagem de T).

   (e) (1 ponto) Calcule a matriz M de T com respeito às bases $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $C = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ do domínio e do codominio.

2. **Exercício 2 [4 pontos]**. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ 0 & -9 & -7 \\ 0 & 14 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) (0,75 pontos) Mostre que o polinômio característico de T é $P(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10)$.

   (b) (1 ponto) Encontre os autovalores de T e a multiplicidade algébrica e geométrica deles. Mostre que T é diagonalizável.

   (c) (0,75 pontos) Encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$, onde A é a matriz de T.

   (d) (0,75 pontos) Sejam v_1, v_2, v_3 as colunas de P. Escreva as coordenadas do vetor $v_1 + v_2$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

   (e) (0,75 pontos) Diga se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável, justificando a resposta.

3. **Exercício 3 [2 pontos]**.

   (a) (1 ponto) Mostre que não existe nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = Im(T)$.

   (b) (1 ponto) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = Im(T)$.

Gabarito IAL turma C Prova 3 tema A

Exercício 1.

(a) As colunas de A são $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

logo: $$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

(b) Reduzindo A em forma escalonada

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{2}{5}II} \begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

obtemos que A tem posto 2 (a matriz reduzida tem duas linhas não nulas). Como $2 \neq 3$ e o domínio e o codomínio de T têm dimensão 3, T não é injetora e não é sobrejetora. Como T não é injetora e sobrejetora, T não é um isomorfismo linear.

(c) Pelo ponto b, A tem posto 2. Sabemos que $\text{Posto}(A) = \dim(\text{Im}(T))$, logo a imagem de T tem dimensão 2. Como
$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{domínio}) = 3$$
obtemos que $\dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1$

(d) Lembramos que $\text{Ker}(T)$ = núcleo de T = o espaço solução de $Ax = 0$; $\text{Im}(T)$ = imagem de T = o espaço-coluna de A. A matriz reduzida é (cf. ponto b)

$$\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Uma base de $\text{Im}(T) = \text{col}(A)$ é $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}\right\}$

(colunas com elementos líderes) (1ª e 3ª col. de A)

(/ /)

Para encontrar uma base de $\ker(T)$ = o núcleo de T temos que resolver o sistema linear $Ax=0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 5x+5y+5z = 0 \\ \quad\quad\quad\;\; 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y = t \\ \text{parametro} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo uma base de $\ker(T)$ é $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(e) Sejam $P_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

onde $T: V = \mathbb{R}^3 \longrightarrow W = \mathbb{R}^3$. Então,

$M = P_W^{-1} A P_V$. Para calcular P_W^{-1} reduzimos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I - III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow P_W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = P_W^{-1} A P_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 2:

(a) O polinômio característico de T é $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ onde $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ 0 & -9 & -7 \\ 0 & 14 & 12 \end{pmatrix}$. Logo

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -7 & -7 \\ 0 & -9-\lambda & -7 \\ 0 & 14 & 12-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\big((-9-\lambda)(12-\lambda) + 7\cdot 14\big) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 + 9\lambda - 12\lambda - 108 + 98) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10).$$

(b) Os autovalores são as raizes do polinômio característico, $P_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10)$.
As soluções de $\lambda^2-3\lambda-10=0$ são

$$\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \frac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$ logo

$P_A(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-5) \Rightarrow$ Os autovalores de T são -2 e 5, e $m_a(-2)=2$, $m_a(5)=1$.
Temos $m_g(-2) = \dim(\ker(A+2I)) =$

$= \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}\right)$. Como a matriz $A+2I =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}$ tem posto 1, $m_g(-2) = 3-1 = 2 = m_a(-2)$

Temos $m_g(5) = \dim(\ker(A-5I)) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -7 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}\right)$

Como a matriz $A-5I = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -7 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}$ tem posto 2, $m_g(5) = 3-2 = 1 = m_a(5)$

Logo $m_a(-2) = m_g(-2)$, $m_a(5) = m_g(5)$ $\Rightarrow$ T é diagonalizável.

(c) Uma base de $\ker(A+2I)$ é $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Uma base de $\ker(A-5I)$ é $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

Logo, escolhendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ temos

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) Como $v_1 + v_2 = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 0$, as coordenadas de $v_1 + v_2$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$ são $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

~~A matriz A do exercício 1 é~~

(e) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ tem matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

logo T tem polinômio caracteristico $-\lambda^3 \Rightarrow$ o autovalor 0 tem multiplicidade algebrica $= 3$. Mas $mg(0) = \dim(\ker(A - 0I)) = \dim(\ker(A)) =$ $= 3 - \text{Posto}(A) = 3 - 2 = 1$. Como $1 \neq 3$, T não é diagonalizável.

Exercício 3. (b) $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(T) = \operatorname{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

(a) Se existisse $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear com $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$ então $\dim(\ker(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T)) = d \Rightarrow$ como $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$ temos $2d = 3$, absurdo.
(d é um número inteiro, e 3 é impar)

Terceira prova **IAL Turma C** **25/11/2015**
Tema B **Nome e matricula:**

1. **Exercício 1 [4 pontos]**. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 5(x+y+z) \\ 5z \end{pmatrix}$$

   (a) (0,75 pontos) Escreva a matriz A da transformação linear T.

   (b) (0,75 pontos) Diga se T é injetora e/ou sobrejetora e/ou um isomorfismo linear, justificando as respostas.

   (c) (0,75 pontos) Calcule a dimensão do núcleo e da imagem de T, justificando as respostas.

   (d) (0,75 pontos) Encontre uma base de $\ker(T)$ (o núcleo de T) e uma base de $Im(T)$ (a imagem de T).

   (e) (1 ponto) Calcule a matriz M de T com respeito às bases $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $C = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ do domínio e do codominio.

2. **Exercício 2 [4 pontos]**. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ 0 & 12 & 14 \\ 0 & -7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) (0,75 pontos) Mostre que o polinômio característico de T é $P(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10)$.

   (b) (1 ponto) Encontre os autovalores de T e a multiplicidade algébrica e geométrica deles. Mostre que T é diagonalizável.

   (c) (0,75 pontos) Encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$, onde A é a matriz de T.

   (d) (0,75 pontos) Sejam v_1, v_2, v_3 as colunas de P. Escreva as coordenadas do vetor $v_1 + v_2$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

   (e) (0,75 pontos) Diga se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável, justificando a resposta.

3. **Exercício 3 [2 pontos]**.

   (a) (1 ponto) Mostre que não existe nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = Im(T)$.

   (b) (1 ponto) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = Im(T)$.

Gabarito IAL turma C Prova 3 tema B

Exercício 1.

(a) As colunas de A são $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

logo: $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\5 & 5 & 5\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

(b) Reduzindo A em forma escalonada

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\5 & 5 & 5\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{5}{2}II} \begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

obtemos que A tem posto 2 (a matriz reduzida tem duas linhas não nulas) Como $2 \neq 3$ e o domínio e o codomínio de T têm dimensão 3, T não é injetora e não é sobrejetora. Como T não é injetora e sobrejetora, T não é um isomorfismo linear.

(c) Pelo ponto b, A tem posto 2. Sabemos que $\text{Posto}(A) = \dim(\text{Im}(T))$, logo a imagem de T tem dimensão 2. Como
$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{domínio}) = 3$,
obtemos que $\dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1$.

(d) Lembramos que $\text{Ker}(T)$ = núcleo de T = = o espaço-solução de $Ax = 0$; $\text{Im}(T)$ = = imagem de T = o espaço-coluna de A. A matriz reduzida é (cf. ponto b)

$$\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Uma base de $\text{Im}(T) = \text{col}(A)$ é $\left\{\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}\right\}$

$*$ — $*$ → (colunas com elementos líderes) 1^a e 3^a colunas de A

Para encontrar uma base de $\ker(T)$ = o núcleo de T, temos que resolver o sistema linear $Ax=0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 5x+5y+5z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y=t \\ \text{parametro} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo uma base de $\ker(T)$ é $\left\{\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

(e) Sejam $P_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

onde $T: V=\mathbb{R}^3 \longrightarrow W=\mathbb{R}^3$. Então,

$M = P_W^{-1} A P_V$. Para calcular P_W^{-1} reduzimos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I - III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P_W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = P_W^{-1} A P_V =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5\\ 2 & 2 & 0\\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 2. $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7\\ 0 & 12 & 14\\ 0 & -7 & -9 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$.

(a) O polinômio característico de T é

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -7 & -7 \\ 0 & 12-\lambda & 14 \\ 0 & -7 & -9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(\lambda+2)\big((12-\lambda)(-9-\lambda) + 7\cdot 14\big) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 108 + 98) = -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10)$$

(b) Os autovalores são as raizes do polinômio característico, $P_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10)$
As soluções de $\lambda^2-3\lambda-10=0$ são

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$ logo

$P_A(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-5) \Rightarrow$ Os autovalores de T são -2 e 5, e $m_a(-2)=2$, $m_a(5)=1$.
Temos $m_g(-2) = \dim(\ker(A+2I)) =$

$$\dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}\right) = 3 - \text{Posto}\begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} = 3-1=2$$

Logo $m_a(-2) = m_g(-2) = 2$.

Temos $m_g(5) = \dim(\ker(A-5I)) =$

$$\dim\left(\ker\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}\right) = 3 - \text{Posto}\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} = 3-2=1.$$

Logo $m_a(5) = m_g(5) = 1$.
Isso implica que $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ para todo autovalor λ de T, então T é diagonalizável.

(c) $A+2I = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Uma base de $\ker(A+2I)$ é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A-5I = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Uma base de $\ker(A-5I)$ é $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Logo, escolhendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ temos

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) Como $v_1 + v_2 = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 0$, as coordenadas de $v_1 + v_2$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$ são $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ tem matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

logo T tem polinômio caracteristico $-\lambda^3 \Rightarrow$ O autovalor 0 tem multiplicidade algebrica 3. Mas $m_g(0) = \dim(\ker(A - 0I)) = \dim(\ker(A)) =$ $= 3 - \text{Posto}(A) = 3 - 2 = 1$. Como $1 \neq 3$, $m_a(0) \neq m_g(0) \Rightarrow$ T não é diagonalizável.

Exercício 3.

(a) Se existisse $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear com $\ker(T) = \text{Im}(T)$ então $\dim(\ker(T)) = \dim(\text{Im}(T)) =$ $= d \Rightarrow$ como $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) =$ $= \dim(\text{domínio}) = 3$ temos $d + d = 3$, isto é, $2d = 3$, absurdo (d é um número inteiro, e 3 é impar).

(b) $$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(T) = \text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$