Segunda prova **IAL Turma Z Tema A** **25/05/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Considere os vetores de $\mathbb{R}^4$ seguintes.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, w_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Exercício 1 [3 pontos]**
   (a) (0.75 ponto) Dê a definição de espaço solução de um sistema linear homogêneo.
   (b) (0.75 ponto) Mostre que w_1, w_2, w_4, w_6 são linearmente independentes.
   (c) (0.75 ponto) Seja A a matriz cujas colunas são w_1, w_2, w_4, w_6. Resolva o sistema linear homogêneo $Ax = 0$.
   (d) (0.75 ponto) Calcule a dimensão de $[w_1, w_2, w_4, w_6]$.

2. **Exercício 2 [3 pontos]**

   Seja U o espaço solução de $Bx = 0$ onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) (1 ponto) Encontre uma base de U.
   (b) (1 ponto) Encontre uma base de $U^{\perp}$.
   (c) (1 ponto) Encontre uma base do espaço coluna de B.

3. **Exercício 3 [3 pontos]**
   (a) (1.5 ponto) Calcule a projeção ortogonal de w_3 sobre $[w_4, w_5]$.
   (b) (1.5 ponto) Encontre uma base ortogonal de $[w_2, w_4, w_6]$.

4. **Exercício 4 [1 ponto]**

   Encontre duas matrizes quadradas X, Y do mesmo tamanho tais que X e Y têm posto 2 e XY tem posto 1.

Segunda prova **IAL Turma Z Tema B** **25/05/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Considere os vetores de $\mathbb{R}^4$ seguintes.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, w_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Exercício 1 [3 pontos]**
   (a) (0.75 ponto) Dê a definição de espaço solução de um sistema linear homogêneo.
   (b) (0.75 ponto) Mostre que w_1, w_2, w_4, w_6 são linearmente independentes.
   (c) (0.75 ponto) Seja A a matriz cujas colunas são w_1, w_2, w_4, w_6. Resolva o sistema linear homogêneo $Ax = 0$.
   (d) (0.75 ponto) Calcule a dimensão de $[w_1, w_2, w_4, w_6]$.

2. **Exercício 2 [3 pontos]**

   Seja U o espaço solução de $Bx = 0$ onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) (1 ponto) Encontre uma base de U.
   (b) (1 ponto) Encontre uma base de $U^\perp$.
   (c) (1 ponto) Encontre uma base do espaço coluna de B.

3. **Exercício 3 [3 pontos]**
   (a) (1.5 ponto) Calcule a projeção ortogonal de w_3 sobre $[w_4, w_5]$.
   (b) (1.5 ponto) Encontre uma base ortogonal de $[w_2, w_4, w_6]$.

4. **Exercício 4 [1 ponto]**

   Encontre duas matrizes quadradas X, Y do mesmo tamanho tais que X e Y têm posto 2 e XY tem posto 1.

2ª PROVA - IAL TURMA Z - 21/05/2016

Vou resolver o tema A indicando as diferências com o tema B.

① (a) O espaço solução de um sistema linear homogêneo $Ax=0$, onde A é uma matriz $n \times m$ e $x \in \mathbb{R}^m$, é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^m$ tais que $Av = 0$.

(b) w_1, w_2, w_4, w_6 são linearmente independentes: como se trata de quatro vetores de $\mathbb{R}^4$ basta mostrar que $\det(A) \neq 0$ onde $A = (w_1 | w_2 | w_4 | w_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$$\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 3 & 2 & 1 \\ \cancel{2} & 3 & 0 & 1 \\ \cancel{2} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{II-I}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot(-2) \neq 0$$

(tema B: veja abaixo)

(c) $Ax = 0 \rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_4 + x_4 w_6 = 0$

$(\rightarrow (w_1 | w_2 | w_4 | w_6) X = 0)$ $\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

pois w_1, w_2, w_4, w_6 são linearmente independentes.

(d) $W = [w_1, w_2, w_4, w_6]$ - Um conjunto gerador de W é $\{w_1, w_2, w_4, w_6\}$. Ele é linearmente independente pelo ponto (b) $\Rightarrow$ é uma base (por def. de base) $\Rightarrow \dim(W) = 4$.

● No tema B a única diferência é o calculo de $\det(A)$:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{II-I}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 \neq 0$$

② (a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\substack{\text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I}}} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\quad r \quad s} \rightarrow \begin{cases} x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -r-s \end{cases}$ (mesma sol no tema B)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r-s \\ r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Uma base de U é $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $v \in U^\perp \iff v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ e $v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow U^\perp$ é o espaço-solução de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

Escalonando $\begin{pmatrix} \textcircled{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\quad r \quad s} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = r \\ x_3 = r \\ x_4 = s \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ r \\ S \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Uma base de $U^\perp$ é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c)

$B \underset{\text{escalonamento já feito}}{\rightsquigarrow \rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Uma base de $Col(B)$ é dada por:

1ª e 4ª coluna de $B \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (no tema B tem 3 no lugar de 2)

③ (a) $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$

$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}$. Ⓟ = Proj. ort. =

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 \\ 2/5 & 1/7 \\ 0 & 1/7 \\ 1/5 & -2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/7 \\ -6/7 \\ -6/7 \\ 12/7 \end{pmatrix}$$

No tema B $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mas o resultado é o mesmo.

(b) $\underbrace{w_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}}_{\text{"}v_1\text{"}}, \underbrace{w_4 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{"}v_2\text{"}}, \underbrace{w_6 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{"}v_3\text{"}}.$

Para aplicar Gram-Schmidt vou chamar eles de v_1, v_2, v_3

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}, \quad u_2 = v_2 - \frac{u_1 v_2}{u_1 u_1} u_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{18}\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1 v_3}{u_1 u_1} u_1 - \frac{u_2 v_3}{u_2 u_2} u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{18}\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Uma base ortogonal de $[w_2, w_4, w_6]$ é $\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\right\}$

$\circledast$

No tema B temos: $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}$,

(a diferença é que $v_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}$)

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 v_2}{u_1 u_1} u_1 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{-6}{18}\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1 v_3}{u_1 u_1} u_1 - \frac{u_2 v_3}{u_2 u_2} u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{+6}{18}\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

---

④ $X = Y = \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{posto } 2}, \quad XY = \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{posto } 1}$

#