Terceira prova **IAL Turma Z Tema A** **01/07/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [4 pontos]**
   (a) (1 ponto) Dê a definição de núcleo de uma transformação linear.
   (b) (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por
   $$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y+z-w \end{pmatrix}.$$
   Escreva a matriz A associada à transformação linear T.
   (c) (1 ponto) Diga se T é injetora.
   (d) (1 ponto) Encontre uma base da imagem de T.

2. **Exercício 2 [1 ponto]**
   Sejam V, W espaços vetoriais, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V, $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ uma base de W. Seja $T : V \to W$ definida por
   $$T(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a-b)w_1 - bw_2.$$
   Escreva a matriz de T nas bases B de V, C de W.

3. **Exercício 3 [4 pontos]**
   Diga se as matrizes seguintes são diagonalizáveis (1 ponto para cada matriz).
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calcule A^{50} (1 ponto).

4. **Exercício 4 [1 ponto]**
   Seja A a matriz de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Seja $B = A^2 = A \cdot A$. Mostre que se B é a matriz identidade então T é injetora.

Terceira prova **IAL Turma Z Tema B** **01/07/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1** [**4 pontos**]

   (a) (1 ponto) Dê a definição de núcleo de uma transformação linear.

   (b) (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y+z-w \end{pmatrix}.$$

   Escreva a matriz A associada à transformação linear T.

   (c) (1 ponto) Diga se T é injetora.

   (d) (1 ponto) Encontre uma base da imagem de T.

2. **Exercício 2** [**1 ponto**]

   Sejam V, W espaços vetoriais, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V, $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ uma base de W. Seja $T : V \to W$ definida por

   $$T(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a-b)w_1 - bw_2.$$

   Escreva a matriz de T nas bases B de V, C de W.

3. **Exercício 3** [**4 pontos**]

   Diga se as matrizes seguintes são diagonalizáveis (1 ponto para cada matriz).

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule A^{50} (1 ponto).

4. **Exercício 4** [**1 ponto**]

   Seja A a matriz de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Seja $B = A^2 = A \cdot A$. Mostre que se B é a matriz identidade então T é injetora.

Resolução 3ª prova IAL . 01/07/2016

(Tema A e Tema B)

Ex 1.

(a) O *núcleo* de uma transformação linear $T: V \to W$ é $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$.

(b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $$A \xrightarrow[\text{ESCALONAMENTO}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ tem posto $2 \Rightarrow$ como $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $2 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, T não é injetora.

(d) Olhando a matriz reduzida, uma base de $\text{Im}(T)$ é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (1^a e 4^a coluna de $\underline{\underline{A}}$).

Ex 2.

A matriz é: $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 3.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$

$\Rightarrow$ autovalores 0 e 1, $m_a(0) = 1$, $m_a(1) = 1$;

$m_g(0) = \dim(\text{Ker}(A)) = 1$, $m_g(1) = \dim(\text{Ker}(A - I)) =$

$\dim\left(\text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = 1$. [redacted] $\begin{matrix} m_a(0) = 1 = m_g(0) \\ m_a(1) = 1 = m_g(1) \end{matrix} \Rightarrow A$ é diagonalizável.

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = (\lambda - 0)^2$

$\Rightarrow$ O único autovalor é 0 e $m_a(0) = 2$. Logo

$m_g(0) = \dim(\ker(B)) = 1 \Rightarrow m_a(0) \neq m_g(0) \Rightarrow$ B não é diagonalizável.

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (1-\lambda)^2 \Rightarrow$ o único autovalor é 1 e $m_a(1) = 2$

$m_g(1) = \dim(\ker(C - I)) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \Rightarrow$

$m_a(1) \neq m_g(1) \Rightarrow C$ não é diagonalizável.

(d) $A^{50} = ?$ ‖ Base de W_0 : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, Base de W_1 : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{50} = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} \cdots PDP^{-1} =$

$= PD^{50}P^{-1}$. Mas $D^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A^{50} = PDP^{-1} = A \Rightarrow \underline{A^{50} = A}$.

Ex 4.

Temos $B = A^2 = 1$ (matriz identidade).

Para mostrar que T é injetora precisamos mostrar que $T(v) = 0$ implica $v = 0$, ou seja $Av = 0 \Rightarrow v = 0$. Se $Av = 0$, $A \cdot Av = 0 \Rightarrow A^2 v = 0 \Rightarrow Bv = 0 \Rightarrow Iv = 0 \Rightarrow v = 0$.

Um outro modo era mostrar que $\det(A) \neq 0$: $\det(B) = 1$ e $\det(B) = \det(A^2) = \det(A)^2 \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$.