Primeira prova **IAL Turma Y Tema A** **15/09/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   Resolva os sistemas lineares seguintes usando a redução de Gauss (1 ponto para cada sistema).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 7x_2 = -1 \end{cases}$$

2. **Exercício 2 [3 pontos]**

   Calcule a inversa das matrizes seguintes (1 ponto para cada matriz).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $A^2 = A \cdot A$ (1 ponto).

3. **Exercício 3 [3 pontos]**

   Diga se a matriz seguinte tem inversa (1 ponto).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Calcule os determinantes (1 ponto para cada determinante)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}.$$

4. **Exercício 4 [1 ponto]**

   Sejam a, b, c três escalares.

   Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $B = (a \; b \; c)$.

   Mostre que AB é uma matriz quadrada e mostre que $\det(AB) = 0$.

Primeira prova **IAL Turma Y Tema B** **15/09/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   Resolva os sistemas lineares seguintes usando a redução de Gauss (1 ponto para cada sistema).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

2. **Exercício 2 [3 pontos]**

   Calcule a inversa das matrizes seguintes (1 ponto para cada matriz).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $A^2 = A \cdot A$ (1 ponto).

3. **Exercício 3 [3 pontos]**

   Diga se a matriz seguinte tem inversa (1 ponto).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Calcule os determinantes (1 ponto para cada determinante)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}.$$

4. **Exercício 4 [1 ponto]**

   Sejam a, b, c três escalares.

   Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $B = (a \ b \ c)$.

   Mostre que AB é uma matriz quadrada e mostre que $\det(AB) = 0$.

Exercício 1 (tema A)

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}/3]{\text{III}+\text{II}}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{array}\right) \\ \quad\quad\quad s \quad\; t \end{array} \rightsquigarrow \quad x_3 = s \quad x_2 = 1$$

$x_4 = t \quad x_1 + x_2 - s - t = 1$

$\Rightarrow x_1 = -1 + s + t + 1 = s + t$

Logo
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ 1 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No tema B a II e a III equação são trocadas.
(→ A solução é a mesma.)

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}\leftrightarrow\text{III}]{\text{II}-2\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$\rightarrow 4x_3 = 12 \rightarrow x_3 = 3 \rightarrow -x_2 - 2\cdot 3 = -8 \rightarrow x_2 = 2,$

$x_1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow x_1 = 1$

(No tema B tem o mesmo sistema)
Logo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-3} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{array}\right) \\ \quad\quad t \end{array} \quad x_3 = t.$$

$x_2 = 3t - 1, \; x_1 = -2(3t-1) - t = -7t + 2.$ Logo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t+2 \\ 3t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No tema B a II e III eq. são trocados ⇝ mesma solução.

Exercício 2 (tema A)

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-3\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \Leftrightarrow \mathrm{III}]{\mathrm{II}-2\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\mathrm{II} \\ \mathrm{III}/4}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{III}]{\mathrm{I}+\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right) \quad \text{logo} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 5/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

No tema B tem a mesma matriz.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \Leftrightarrow \mathrm{IV}}]{\substack{-\mathrm{II} \\ \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Logo $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. No tema B é análogo, na matriz B os sinais são trocados.

(c)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(produto linha × coluna)

No tema B é igual.

Exercício 3 (tema A)

(a) Temos $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{IV-2I}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

logo a matriz dada não tem inversa: de fato, tem determinante $= 0$.

No tema B:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \overset{IV-3I}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

⇝ mesma resposta.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{III-3I}{\overset{II-I}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$. (Igual no tema B)

(c) Tema A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{II-I}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k(k-1)$

Tema B: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \underset{III-I}{\overset{II-I}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k(k-1)$

Exercício 4. (Igual nos dois temas)

$$AB = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} =$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} b^2 & bc \\ cb & c^2 \end{vmatrix} - ab \begin{vmatrix} ba & bc \\ ca & c^2 \end{vmatrix} + ac \begin{vmatrix} ba & b^2 \\ ca & cb \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(b^2c^2 - b^2c^2) - ab(abc^2 - abc^2) + ac(ab^2c - ab^2c)$$

$$= a^2 \cdot 0 - ab \cdot 0 + ac \cdot 0 = 0$$