Segunda prova **IAL Turma Y Tema A** **20/10/2016**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Cada exercício vale um ponto.

1. Dê a definição de espaço-linha e espaço-coluna de uma matriz.

2. Seja $V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}] \leq \mathbb{R}^2$. Mostre que $V = \mathbb{R}^2$. [Dica: basta mostrar que $\dim(V) = 2$.]

3. Seja $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \leq \mathbb{R}^3$. Encontre uma base de $W^{\perp}$.

4. Calcule o posto de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por $x = y = z$.
   Encontre uma base de W.

6. Seja $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \leq \mathbb{R}^3$ e seja $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Encontre a projeção ortogonal de v sobre W.

7. Calcule a dimensão de $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]$.

8. Seja $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}] \leq \mathbb{R}^3$. Encontre uma base ortogonal de W. [Dica: lembre-se do item acima.]

9. Seja $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calcule a projeção ortogonal de v sobre $[v]$. [Dica: faça um desenho.]

10. Sejam a, b, c três escalares e seja $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

    Calcule o posto de A.

Gabarito 2ª prova — Tema A

1. O espaço-linha de uma matriz é o espaço vetorial gerado pelas linhas, o espaço-coluna é o espaço vetorial gerado pelas colunas.

2. $V = \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]$, $\dim(V) = \text{Posto}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix} = 2$

(de fato $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$) logo $V \leq \mathbb{R}^2$,

$\dim(V) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow V = \mathbb{R}^2$.

3. $W = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \leq \mathbb{R}^3$, $W^\perp$ é dado por $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$

ou seja $x+y+z=0 \rightsquigarrow (1\ 1\ 1\ |\ 0) \rightsquigarrow y=s,\ z=t$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{base} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

4. Posto: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

logo o posto é 1 (= número de líderes).

5. $W: \begin{cases}x=y\\y=z\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{base}: \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

6. $A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}$, $(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&3/2\end{pmatrix}$,

$P = A(A^TA)^{-1}A^T v = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1/2\\0&1/2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

7. $\dim(W) = \text{Posto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2$

8.

Uma base de W é $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$ (espaço-coluna da matriz correspondente cf. item acima)

Gram-Schmidt: $u_1 = v_1$,

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 v_2}{u_1 u_1} u_1 = v_2 - \frac{5}{3} u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

posso escolher $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Base ortogonal: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

9.

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad W = [v]$

$\Rightarrow$ $p = v$

(proj ort. de v sobre a reta gerada por v é v mesmo)

10.

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b & a \cdot c \\ b \cdot a & b \cdot b & b \cdot c \\ c \cdot a & c \cdot b & c \cdot c \end{pmatrix}$$

As três linhas são proporcionais (são multiplas de $(a\ b\ c)$)

logo o posto é 1 se $(a, b, c) \neq (0,0,0)$

e é 0 se $(a, b, c) = (0,0,0)$.

(aceitei a resposta "o posto é 1" se justificada)
(sem distinguir os casos $(a,b,c) = 0$ ou $\neq 0$)