Terceira prova **IAL Turma Y Tema A** **24/11/2016**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (1 ponto) Dê a definição de núcleo de uma transformação linear.

2. (3 pontos). Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$
   (a) Escreva a matriz de T (1 ponto).
   (b) Encontre uma base da imagem de T (1 ponto).
   (c) Diga se T é injetiva (1 ponto).

3. (1 ponto). Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$
   Escreva a matriz de T nas bases
$$B = C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$
   do domínio e do codomínio.

4. (2 pontos). Seja
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Mostre que A é diagonalizável (1 ponto).
   (b) Encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$ (1 ponto).

5. (1 ponto) Diga se $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

6. (1 ponto) Diga se $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

7. (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear.
   Mostre que T não é injetiva.

Terceira prova **IAL Turma Y Tema B** **24/11/2016**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (1 ponto) Dê a definição de núcleo de uma transformação linear.

2. (3 pontos). Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

   (a) Escreva a matriz de T (1 ponto).

   (b) Encontre uma base da imagem de T (1 ponto).

   (c) Diga se T é injetiva (1 ponto).

3. (1 ponto). Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

   Escreva a matriz de T nas bases

$$B = C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

   do domínio e do codomínio.

4. (2 pontos). Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostre que A é diagonalizável (1 ponto).

   (b) Encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$ (1 ponto).

5. (1 ponto) Diga se $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

6. (1 ponto) Diga se $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

7. (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear.

   Mostre que T não é injetiva.

* Gabarito 3ª prova (TEMA A) IAL (turma Y)

1: Se $T: V \longrightarrow W$ é transformação linear, o núcleo de T é $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$.

2. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ (No tema B tem 3 no lugar de 2)

(a) A matriz de T é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Escalonando A obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ logo uma base de $Im(T)$ é uma base do espaço-coluna de A: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $\text{Posto}(A) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ = dimensão do domínio logo T é injetiva.

3. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} \longrightarrow$ a matriz de T é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos fazer a mudança de base.

$P_B = P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $P_C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = P_C^{-1} A P_B =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, (a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (4-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2$$

Assim o polinômio característico de A é

$P(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2 = -(\lambda-0)^1(\lambda-4)^2 \Rightarrow$ os autovalores de A são 0 e 4, e $ma(0) = 1$, $ma(4) = 2$.

- $mg(0) = \dim(\ker(A - 0I)) = \dim(\ker(A)) = 3 - \text{Posto}(A) =$
$= 3 - 2 = 1$ logo $\underline{mg(0) = 1 = ma(0)}$ ✓

- $mg(4) = \dim(\ker(A - 4I)) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) =$
$= 3 - \text{Posto}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$ logo $\underline{mg(4) = 2 = ma(4)}$ ✓

As multiplicidades algébricas são iguais às multiplicidades geométricas logo A é diagonalizável.

(b)

$\overbrace{\ker(A - 0I)}^{\text{auto-espaço de } 0} = \ker(A) = \ker\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

Base: $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\overbrace{\ker(A - 4I)}^{\text{auto-espaços de } 4} = \ker\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Base: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Juntando as bases dos auto-espaços obtemos

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}, \quad \underline{P^{-1}AP = D}$$

No tema B é análogo, os autovalores são 0 e 6 e P é a mesma e na matriz D tem 6 no lugar de 4

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$

O único autovalor é 3 e $ma(3) = 2$.

$mg(3) = \dim(\ker(A - 3I)) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

logo $mg(3) = 1 \neq 2 = ma(3) \Rightarrow A$ não é diagonalizável.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável pois é diagonal, $\leftarrow$ (basta falar isso)

por exemplo escolhendo $P = I$ (matriz identidade)

e $D = A$ (que é diagonal) temos $P^{-1}AP = A = D$.

7. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Se T é injetiva (por contradição)

então $\ker(T) = \{0\}$ logo $\dim(\ker(T)) = 0$, mas

$3 = \dim(\text{domínio}) = \underbrace{\dim(\ker(T))}_{=0} + \underbrace{\dim(\underbrace{\mathrm{Im}(T)}_{\leq \mathbb{R}^2})}$

logo $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ o que não é possível pois

$\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ logo $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 2$.

Outra solução: o posto de A não pode ser 3 pois A é uma matriz 2×3 logo $\mathrm{Posto}(A) \leq 2$.