Primeira prova **ÁLGEBRA 1 Turma D** **11/04/2017**

Resolução.

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   (a) (1 ponto) Encontre inteiros a, b tais que $21a + 13b = 1$.
   É só aplicar o algoritmo de Euclides a 21 e 13, obtendo

21	13	
1	0	21
0	1	13
1	-1	8
-1	2	5
2	-3	3
-3	5	2
5	-8	1

   Logo
   $$5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 1.$$

   (b) (1 ponto) Resolva a equação $13x \equiv 2 \mod 21$.
   Reduzindo a igualdade $5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 1$ (obtida no item anterior) módulo 21 obtemos $-8 \cdot 13 \equiv 1 \mod 21$, ou seja $13 \cdot 13 \equiv 1 \mod 21$. Multiplicando os dois lados da equação por 13 obtemos $13 \cdot 13x \equiv 13 \cdot 2 \mod 21$ ou seja $x \equiv 5 \mod 21$. Logo a única solução da equação é
   $$x \equiv 5 \mod 21.$$

   (c) (1 ponto) Resolva a equação $39x \equiv 6 \mod 63$.
   Dividindo por 3 obtemos a equação $13x \equiv 2 \mod 21$ que foi resolvida no item anterior obtendo $x \equiv 5 \mod 21$. Logo as três soluções da equação proposta são
   $$x \equiv 5 \mod 63,$$
   $$x \equiv 5 + 21 = 26 \mod 63,$$
   $$x \equiv 5 + 2 \cdot 21 = 47 \mod 63.$$

2. **Exercício 2 [2 pontos]**

   Seja $f : A \to \mathbb{Z}$ uma função e seja R a relação sobre A dada por "aRb se e somente se $f(a) \leq f(b)$". Mostre que

   - (1 ponto) R é reflexiva e transitiva.
     R é reflexiva pois se $a \in A$ então $f(a) \leq f(a)$ sendo $\leq$ reflexiva, logo aRa. R é transitiva pois se aRb e bRc então $f(a) \leq f(b)$ e $f(b) \leq f(c)$ logo $f(a) \leq f(c)$ sendo $\leq$ transitiva, daí aRc.

- (1 ponto) R é antisimétrica se e somente se f é injetiva.

  Suponha R antisimétrica. Queremos mostrar que f é injetiva. Suponha de ter $a, b \in A$ com $f(a) = f(b)$, queremos mostrar que $a = b$. Sendo $f(a) = f(b)$ temos $f(a) \leq f(b)$ e $f(b) \leq f(a)$, logo aRb e bRa, logo $a = b$ sendo R antisimétrica.

  Suponha f injetiva. Queremos mostrar que R é antisimétrica. Suponha de ter $a, b \in A$ com aRb e bRa. Queremos mostrar que $a = b$. aRb significa $f(a) \leq f(b)$ e bRa significa $f(b) \leq f(a)$, logo $f(a) = f(b)$ sendo $\leq$ antisimétrica. Daí $a = b$ sendo f injetiva.

3. **Exercício 3 [1 ponto]**

   Considere a operação $a * b := ab - a - b + 2$ definida em $\mathbb{N}$. Mostre que $*$ é associativa.

   Basta calcular os dois elementos $(a * b) * c$ e $a * (b * c)$ e observar que é obtido o mesmo resultado.

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (ab - a - b + 2) * c \\ &= (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 \\ &= abc - ac - bc + 2c - ab + a + b - 2 - c + 2 \\ &= abc - ab - ac - bc + a + b + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (bc - b - c + 2) \\ &= a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 \\ &= abc - ab - ac + 2a - a - bc + b + c - 2 + 2 \\ &= abc - ab - ac - bc + a + b + c.\end{aligned}$$

4. **Exercício 4 [1 ponto]**

   Seja $*$ uma operação associativa de $X = \{1, 2\}$ tal que $1*1 = 2$ e $1*2 = 1$. Calcule $2 * 1$ e $2 * 2$.

   Temos

$$2 * 1 = (1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) = 1 * 2 = 1,$$

$$2 * 2 = (1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) = 1 * 1 = 2.$$

5. **Exercício 4 [3 pontos]**

   Seja $X = \{1, 2, 3\}$ e seja $Y = P(X) \times P(X)$ onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X. Defina a relação R sobre Y dada por $(A, B)R(C, D)$ se e somente se $A \cap B = C \cap D$.

   - (1 ponto) Mostre que R é uma equivalência.

     R é reflexiva pois $(A, B)R(A, B)$ para todo $(A, B) \in Y$, de fato $A \cap B = A \cap B$.

R é simétrica pois se $(A,B)R(C,D)$ então $A \cap B = C \cap D$ logo $C \cap D = A \cap B$ daí $(C,D)R(A,B)$.

R é transitiva pois se $(A,B)R(C,D)$ e $(C,D)R(E,F)$ então por um lado $A \cap B = C \cap D$, por outro lado $C \cap D = E \cap F$ logo $A \cap B = E \cap F$ ou seja $(A,B)R(E,F)$.

- (1 ponto) Lembre-se que o conjunto quociente Y/R é o conjunto das classes de equivalência $[(A,B)]_R = \{(C,D) \in Y \ : \ (A,B)R(C,D)\}$. Mostre que a função

  $$f : Y/R \to P(X)$$

  $$f([(A,B)]_R) := A \cap B$$

  é bem definida e bijetiva.

  f é bem definida pois se $[(A,B)]_R = [(C,D)]_R$ então $(A,B)R(C,D)$ logo $A \cap B = C \cap D$ ou seja $f([(A,B)]_R) = f([(C,D)]_R)$.

  f é injetiva pois se $f([(A,B)]_R) = f([(C,D)]_R)$ então $A \cap B = C \cap D$ ou seja $[(A,B)]_R = [(C,D)]_R$.

  f é sobrejetiva pois se $S \in P(X)$ então $f([(S,S)]_R) = S \cap S = S$.

- (1 ponto) Conte as classes de equivalência.

  O número de classes de equivalência é a cardinalidade de Y/R (pois Y/R é o conjunto das classes de equivalência). Como f é bijetiva temos $|Y/R| = |P(X)| = 2^3 = 8$. Há 8 classes de equivalência.