Resolução da primeira prova de Álgebra 1 turma C, 2018-2.

1. **Exercício 1 [2 pontos]**

   Sejam $f : X \to Y$ **e** $g : Y \to Z$ **duas funções, e seja** $h : X \to Z$ **definida por** $h(x) = g(f(x))$ **(composição)**.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

   (a) **Mostre que se** h **é injetiva e** f **é sobrejetiva então** g **é injetiva**.

   Sejam $a, b \in Y$ com $g(a) = g(b)$.

   Queremos mostrar que $a = b$.

   Sendo f sobrejetiva existem $x, y \in X$ com $f(x) = a$ e $f(y) = b$.

   A igualdade $g(a) = g(b)$ pode então ser escrita $g(f(x)) = g(f(y))$

   ou seja $h(x) = h(y)$.

   Sendo h injetiva obtemos $x = y$,

   logo $a = f(x) = f(y) = b$.

   (b) **Mostre que se** h **é sobrejetiva e** g **é injetiva então** f **é sobrejetiva**.

   Seja $y \in Y$.

   Queremos encontrar $x \in X$ com $f(x) = y$.

   Considere $z = g(y) \in Z$.

   Sendo h sobrejetiva existe $x \in X$ com $h(x) = z = g(y)$,

   ou seja $g(f(x)) = g(y)$.

   Sendo g injetiva obtemos $f(x) = y$.

2. **Exercício 2 [2 pontos]**

   Sejam A, B conjuntos. Lembre-se que $A - B = \{a \in A \ : \ a \notin B\}$. Mostre que $A - (A - B) = B$ se e somente se $A \supseteq B$. Cada implicação vale um ponto.

   Primeira implicação. Suponha $A-(A-B) = B$. Mostraremos que $A \supseteq B$. Seja $b \in B$, queremos mostrar que $b \in A$. Temos $b \in B = A - (A - B)$ logo $b \in A$ e $b \notin A - B$, segue que $b \in A$.

   Segunda implicação. Suponha $A \supseteq B$. Mostraremos que $A-(A-B) = B$.

   - Primeira inclusão: $A - (A - B) \subseteq B$. Seja $a \in A - (A - B)$, mostraremos que $a \in B$. Temos $a \in A$ e $a \notin A - B$; a condição $a \notin A - B$ significa que é falso que "$a \in A$ e $a \notin B$", segue que $a \notin A$ ou $a \in B$. Mas o primeiro caso não acontece porque por hipótese $a \in A$, logo devemos ter $a \in B$.
   - Segunda inclusão: $A - (A - B) \supseteq B$. Seja $b \in B$, mostraremos que $b \in A - (A - B)$, ou seja que $b \in A$ e que $b \notin A - B$. É claro que $b \notin A - B$ sendo $b \in B$ por hipótese. Além disso $b \in B$ implica $b \in A$ (sendo $B \subseteq A$ por hipótese).

3. **Exercício 3 [3 pontos]**

   (a) (1 ponto) **Encontre inteiros a, b tais que $32a + 23b = 1$.**

   Algoritmo de Euclides.

32	23	
1	0	32
0	1	23
1	-1	9
-2	3	5
3	-4	4
-5	7	1

   Segue que $-5 \cdot 32 + 7 \cdot 23 = 1$.

   (b) (1 ponto) **Resolva a equação $23x \equiv 2 \mod 32$.**

   Pelo item anterior $7 \cdot 23 \equiv 1 \mod 32$ e multiplicando a equação por 7 obtemos $7 \cdot 23x \equiv 7 \cdot 2 \mod 32$ ou seja $x \equiv 14 \mod 32$.

   (c) (1 ponto) **Resolva a equação $46x \equiv 4 \mod 64$.**

Dividindo tudo por 2 obtemos $23x \equiv 2 \mod 32$ que é a equação resolvida acima, obtemos $x \equiv 14 \mod 32$ logo temos duas soluções módulo 64, que são $x \equiv 14 \mod 64$ e $x \equiv 14 + 32 = 46 \mod 64$.

4. **Exercício 4 [3 pontos]**.

   (a) (1 ponto) **Seja S a relação de $\mathbb{Z}$ seguinte: xSy se e somente se $2x + 3y = 1$. Mostre que S é antisimétrica, ou seja que se xSy e ySx então $x = y$. [Dica: uma implicação lógica com premissa falsa é verdadeira.]**

   Mostraremos que é sempre falso que xSy e ySx. Precisamos resolver o sistema dado pelas equações $2x + 3y = 1$ e $2y + 3x = 1$. Fazendo 3 a primeira menos 2 a segunda obtemos $5y = 1$ que é uma contradição sendo y inteiro.

   Era também possível subtrair as duas equações obtendo $x - y = 0$ ou seja $x = y$.

   (b) (2 pontos) **Seja R a relação de $\mathbb{Z}$ seguinte: xRy se e somente se $2x + 3y$ é divisível por 5.**

   - **Mostre que R é reflexiva**. Temos que $2x + 3x = 5x$ é divisível por 5, logo xRx para todo $x \in \mathbb{Z}$.
   - **Mostre que R é simétrica**. Suponha xRy, ou seja $2x+3y = 5d$ com d inteiro. Então $2y+3x = 2y-2x+5x = 2y-(5d-3y)+5x = 5y - 5d + 5x = 5(y - d + x)$ logo yRx.