Primeira prova **ÁLGEBRA 2 Turma A** **14/04/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   Sejam $x = (153)(7245)(214) \in S_9$, $y = (2987)(731)(2569) \in S_9$.

   (a) (0.5). Dê a definição de grupo simétrico de grau n.

   (b) (0.5). Calcule as ordens $o(x)$, $o(y)$.

   (c) (0.5). Calcule xyx^{-1} e yxy^{-1}.

   (d) (0.5). Diga se $\langle x \rangle \trianglelefteq S_9$ e se $\langle y \rangle \trianglelefteq S_9$.

   (e) (1). Diga se $x \in A_9$, $y \in A_9$, $xy \in A_9$.

2. **Exercício 2 [1.5 pontos]**

   Sejam A, B dois grupos e seja $f : A \to B$ um homomorfismo. Mostre que se $|B|$ é impar então o indice $|A : \ker(f)|$ é impar.

3. **Exercício 3 [2.5 pontos]**

   Seja G um grupo e seja N um subgrupo normal de G.

   (a) (1). Mostre que se $|N|$ e $|G/N|$ são impares então $|G|$ é impar.

   (b) (1.5). Mostre que $C(N) = \{g \in G \ : \ gn = ng \ \forall n \in N\}$ é um subgrupo normal de G (mostre que $C(N)$ é um subgrupo e que $C(N)$ é normal).

4. **Exercício 4 [3 pontos]**

   Seja $G = C_5 \times C_5$, o produto direto entre C_5 e C_5. Lembre-se que a operação é $(a,b)(c,d) := (ac, bd)$, o elemento neutro é $(1,1)$ e o inverso de (a,b) é (a^{-1}, b^{-1}). Escreva $C_5 = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e seja

   $$H := \{(a,a) \ : \ a \in C_5\} = \{(1,1), (x,x), (x^2,x^2), (x^3,x^3), (x^4,x^4)\}.$$

   (a) (0.6). Mostre que G é abeliano.

   (b) (0.6). Mostre que $H \leq G$.

   (c) (0.6). Mostre que $f : G \to C_5$, $f((a,b)) := ab^{-1}$ é um homomorfismo de grupos.

   (d) (0.6). Mostre que $G/H \cong C_5$.

   (e) (0.6). Quantos grupos abelianos tem de ordem $|G|$?