Primeira prova **ÁLGEBRA 3 Turma A** **20/09/2018**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas. A nota será o mínimo entre 10 e a soma dos pontos obtidos.

1. (1 ponto) **Seja G um grupo de ordem ímpar e seja $H \leq G$ de índice 3. Mostre que $H \trianglelefteq G$.** [Dica: Considere a representação permutacional $G \to S_3$ (associada à ação de multiplicação a esquerda de G sobre $\{xH : x \in G\}$) com núcleo $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.]
2. (2 pontos) **Seja G um grupo. Mostre que G não é simples nos seguintes dois casos:** $|G| = 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$ **e** $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$ (cada caso vale 1 ponto).
3. (3 pontos) **Seja G um grupo de ordem $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Mostre que G não é simples**. [Dica: Suponha G simples por contradição. Seja P um 2-Sylow agindo por conjugação no conjunto de todos os 2-Sylow. Procure uma P-órbita $\{Q, R\}$ de tamanho 2 e calcule o índice de $N_G(P \cap Q)$.]
4. (3 pontos) **Seja G um grupo não abeliano de ordem 28 e seja $Z(G) = \{g \in G \ : \ xg = gx \ \forall x \in G\}$ o centro de G.**
   (a) (1 ponto) **Mostre que se um elemento x de ordem 2 comuta com um elemento y de ordem 7 então $x \in Z(G)$.** [Dica: Seja P um 2-Sylow de G contendo x. Mostre que $C_G(x)$ contem P.]
   (b) (1 ponto) **Mostre que G contem 6 elementos de ordem 7 e que a ação de conjugação de G sobre o conjunto X dos elementos de ordem 7 admite uma órbita de tamanho 2.** [Dica: Quais os possíveis tamanhos das órbitas?]
   (c) (1 ponto) **Mostre que $|Z(G)| = 2$.** [Dica: Pelo item anterior existe uma órbita $\{a, b\} \subseteq X$ de tamanho 2. Quanto vale $|G : C_G(a)|$?]
5. (2 pontos) **Considere $G = S_5$, $x = (123) \in G$ e o 3-Sylow $P = \langle x \rangle$.**
   (a) (1 ponto) **Mostre que o normalizador $N_G(P)$ tem ordem 12.** [Dica: conte os conjugados de P, ou seja os 3-Sylow.]
   (b) (1 ponto) **É verdade que $N_G(P) \cong A_4$?**

Pode usar o que foi visto em sala de aula, em particular:

- Se G é um grupo simples não abeliano então G não tem subgrupos de índice 2, 3 ou 4.
- Se G é um grupo com $G/Z(G)$ cíclico então G é abeliano.
- Se G é um grupo de ordem p^2 com p primo então G é abeliano.
- Se G contem dois subgrupos normais A, B com $AB = G$ e $A \cap B = \{1\}$ então $G \cong A \times B$.