Primeira prova **ÁLGEBRA 3 Turma A** **19/09/2019**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (1 ponto) Seja G um grupo que age de maneira transitiva sobre um conjunto X com $|X| \geq 2$, e sejam $\alpha, \beta \in X$ distintos. Sejam H o estabilizador de α em G e K o estabilizador de β em G. Mostre que $HK \neq G$. [Dica: use a transitividade com α e β.]

2. (1 ponto) Diga se existe uma ação transitiva do grupo simétrico S_6 sobre $X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

3. (1 ponto) Seja G um grupo cíclico de ordem 6. Diga se existe uma ação fiel de G sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem 28. Mostre que G não é simples.

5. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem 48. Mostre que G não é simples.

6. (1 ponto) Seja $p \geq 3$ um número primo e seja G um grupo de ordem $17^2 \cdot p$. Mostre que G não é simples.

7. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Mostre que G contem um subgrupo normal de ordem 27 ou 81.

8. (2 pontos) Seja G um grupo de ordem $2^n \cdot 31$, onde $n \geq 1$ é um número natural. Seja P um 2-Sylow de G e seja X o conjunto dos 2-Sylow de G. O grupo P age sobre X por conjugação.

   (a) Mostre que se $|X| \neq 1$ então existe $Q \in X$ tal que $|P : P \cap Q| = 2$.

   (b) Mostre que G não é um grupo simples.

9. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ e seja $H \leq G$ tal que $|G : H| = 5$. Mostre que $H \trianglelefteq G$.