Resolução da primeira prova de álgebra 3 - 2018-2

1. (1 ponto) **Seja G um grupo de ordem ímpar e seja $H \leq G$ de índice 3. Mostre que $H \trianglelefteq G$.** [Dica: Considere a representação permutacional $G \to S_3$ (associada à ação de multiplicação a esquerda de G sobre $\{xH : x \in G\}$) com núcleo $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.]

   Pelo teorema de isomorfismo G/H_G é isomorfo a um subgrupo de S_3. Por outro lado $|G|$ é impar, logo $|G/H_G|$ é ímpar e sendo $|S_3| = 6$ obtemos $|G/H_G| \in \{1, 3\}$. Mas não pode ser $G = H_G$ porque $H_G \leq H < G$ logo $|G : H_G| = 3$. Mas sendo $|G : H| = 3$ e $H_G \leq H$ temos $3 = |G : H_G| = |G : H||H : H_G| = 3|H : H_G|$ logo $|H : H_G| = 1$ ou seja $H = H_G \trianglelefteq G$.

2. (2 pontos) **Seja G um grupo. Mostre que G não é simples nos seguintes dois casos:** $|G| = 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$ **e** $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$ (cada caso vale 1 ponto).

   Se $|G| = 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$ então $n_{11} = 1$ pelo teorema de Sylow (o único divisor de $|G|/11 = 40$ congruente a 1 módulo 11 é 1) logo G contem um 11-Sylow normal (pelo teorema de Sylow) logo G não é simples. Se $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$ então $n_7 \in \{1, 8\}$ pelo teorema de Sylow. Se $n_7 = 1$ então G contem um 7-Sylow normal logo não é simples. Se $n_7 = 8$ então como os 7-Sylow têm ordem 7 (prima), dois quaisquer 7-Sylow têm interseção trivial logo G contem $(7 - 1) \cdot 8 = 48$ elementos de ordem 7. Sendo $56 - 48 = 8$ tem espaço para apenas um 2-Sylow, logo $n_2 = 1$ ou seja G contem um 2-Sylow normal, em particular G não é simples.

3. (3 pontos) **Seja G um grupo de ordem $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Mostre que G não é simples**. [Dica: Suponha G simples por contradição. Seja P um 2-Sylow agindo por conjugação no conjunto de todos os 2-Sylow. Procure uma P-órbita $\{Q, R\}$ de tamanho 2 e calcule o índice de $N_G(P \cap Q)$.]

   Suponha G simples por contradição. Observe primeiramente que $n_2 = 15$. De fato se $n_2 = 3$ ou $n_2 = 5$ então G é isomorfo a um subgrupo de S_5 que é falso pois $|G| = 240$ é maior que $|S_5| = 5! = 120$. Sejam P, Q dois 2-Sylow distintos. Observe que $N_P(Q) \leq P \cap Q$ (porque um 2-subgrupo que normaliza um 2-Sylow está contido nele), por outro lado $P \cap Q \leq N_P(Q)$ (obvio) logo $N_P(Q) = P \cap Q$. Segue que as P-órbitas do conjunto dos 2-Sylow de G têm tamanho 1, 2, 4, 8 ou 16. Existe pelo menos uma tal órbita de tamanho 2 porque a única P-órbita com um único elemento é $\{P\}$ e $n_2 = 15 \not\equiv 1 \mod 4$. Seja então $\{Q, Q'\}$ uma P-órbita de tamanho 2. Segue que $|P : P \cap Q| = |P : N_P(Q)| = 2$ e analogamente

$|Q : N_Q(P)| = |Q : P \cap Q| = 2$ logo $P \cap Q$ é normal em P e em Q logo $P, Q \leq H = N_G(P \cap Q)$. Segue que $|G : H| \in \{1, 3, 5\}$. Mas isso implica que G é isomorfo a um subgrupo de S_5, e já vimos que isso não pode acontecer.

4. (3 pontos) **Seja G um grupo não abeliano de ordem 28 e seja $Z(G) = \{g \in G \ : \ xg = gx \ \forall x \in G\}$ o centro de G.**

   (a) (1 ponto) **Mostre que se um elemento x de ordem 2 comuta com um elemento y de ordem 7 então $x \in Z(G)$.** [Dica: Seja P um 2-Sylow de G contendo x. Mostre que $C_G(x)$ contem P.]

   x está contido em um 2-Sylow P. Como P tem ordem 4, é abeliano, logo $P \leq C_G(x)$. Além disso $y \in C_G(x)$ por hipótese. Segue que 4 e 7 dividem $|C_G(x)|$ logo $4 \cdot 7 = |G|$ divide $|C_G(x)|$ ou que implica $C_G(x) = G$. Ou seja $x \in Z(G)$.

   (b) (1 ponto) **Mostre que G contem 6 elementos de ordem 7 e que a ação de conjugação de G sobre o conjunto X dos elementos de ordem 7 admite uma órbita de tamanho 2.** [Dica: Quais os possíveis tamanhos das órbitas?]

   Pelo teorema de Sylow $n_7 = 1$ e todo elemento de ordem 7 está contido em um 7-Sylow (o gerado por ele) logo os elementos de G de ordem 7 são os elementos não triviais do único 7-Sylow, logo G contem $7 - 1 = 6$ elementos de ordem 7. Seja X o conjunto dos elementos de G de ordem 7. O grupo G age por conjugação sobre X (porque elementos conjugados têm a mesma ordem) e os tamanhos das órbitas dividem $|G|$. Como X tem tamanho 6 e $|G| = 2^2 \cdot 7$, as órbitas têm tamanhos 2, 4 ou 2, 2, 2. Em todo caso existe uma órbita de tamanho 2. Não tem órbitas de tamanho 1 porque se não o 7-Sylow estaria contido no centro de G, logo G seria o produto direto entre um 2-Sylow e um 7-Sylow logo seria abeliano.

   (c) (1 ponto) **Mostre que** $|Z(G)| = 2$. [Dica: Pelo item anterior existe uma órbita $\{a, b\} \subseteq X$ de tamanho 2. Quanto vale $|G : C_G(a)|$?]

   Seja $\{a, b\}$ uma órbita de tamanho 2 contida em X. Segue que $|G : C_G(a)| = 2$ logo $|C_G(a)| = |G|/2 = 14$. Seja $x \in C_G(a)$ de ordem 2. Então $xa = ax$ e a tem ordem 7. Pelo primeiro item isso implica $x \in Z(G)$, logo 2 divide $|Z(G)|$. Por outro lado sendo G não abeliano $G/Z(G)$ não é cíclico, logo o índice de $Z(G)$ não pode ser 2 nem 7. Segue que $Z(G) = \langle x \rangle$ logo $|Z(G)| = 2$.

5. (2 pontos) **Considere $G = S_5$, $x = (123) \in G$ e o 3-Sylow $P = \langle x \rangle$.**

   (a) (1 ponto) **Mostre que o normalizador $N_G(P)$ tem ordem 12.** [Dica: conte os conjugados de P, ou seja os 3-Sylow.]

   x tem $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ conjugados em S_5 (todos os 3-cíclos) e cada 3-Sylow contem dois elementos de ordem 3, logo $n_3 = 20/2 = 10$. Ou seja P tem 10 conjugados. Como $n_3 = |G : N_G(P)|$ segue que $|G : N_G(P)| = 10$ ou seja $|G|/|N_G(P)| = 10$, e sendo $|G| = 5! = 120$ obtemos $|N_G(P)| = 120/10 = 12$.

   (b) (1 ponto) **É verdade que $N_G(P) \cong A_4$?**

   Não porque $P \trianglelefteq N_G(P)$ logo $n_3(N_G(P)) = 1$ mas $n_3(A_4) = 4$.

   Observação: argumentar que $N_G(P) \neq A_4$ (identificando A_4 com um subgrupo de S_5) não é suficiente, a pergunta é se $N_G(P)$ é **isomorfo** a A_4 como grupo abstrato.