

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.

Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. Exercício 1 [2 pontos].

Um grupo G é chamado de metabeliano se existe $N \trianglelefteq G$ abeliano tal que G/N é abeliano.

- (1 ponto) Seja G um grupo metabeliano e seja $H \leq G$. Mostre que H é metabeliano.
- (1 ponto) Seja G um grupo metabeliano e seja $K \trianglelefteq G$. Mostre que G/K é metabeliano. [Considere NK/K .]

2. Exercício 2 [2 pontos].

Seja G um grupo agindo de maneira transitiva sobre um conjunto X e seja H o estabilizador de um $\alpha \in X$, $H = \text{Stab}_G(\alpha) = \{g \in G : g\alpha = \alpha\}$. Seja $K \leq G$, obviamente K age sobre X . Mostre que

- (1 ponto) se $KH = G$ então a ação de K sobre X é transitiva,
- (1 ponto) se a ação de K sobre X é transitiva então $KH = G$.

3. Exercício 3 [2 pontos].

Seja G um grupo finito.

- (1 ponto) Mostre que se $|G| = 48$ então G não é simples.
- (1 ponto) Mostre que se $|G| = 300$ então G não é simples.

4. Exercício 4 [1 ponto].

Mostre que todo grupo de ordem 45 é abeliano.

5. Exercício 5 [2 pontos].

Seja G um grupo de ordem $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$. Mostre que G não é simples. [Dica: o normalizador de um 3-Sylow é abeliano?]

6. Exercício 6 [1 ponto].

Seja p um número primo e sejam $N = C_p \times C_p$, $H = C_p = \langle h \rangle$ com a ação de H sobre N dada por $h(x, y)h^{-1} = (xy, y)$, e por consequência

$$h^i(x, y)h^{-i} = (xy^i, y) \quad \forall i = 0, 1, \dots, p-1.$$

Seja $G = N \rtimes H$ o produto semidireto correspondente. Determine os elementos do centro de G .

1TI: se $f : A \rightarrow B$ é homomorfismo de grupos então $A/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.

2TI: se G é grupo, $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$ então $HN/N \cong H/H \cap N$.

3TI: se G é grupo, $K, N \trianglelefteq G$ e $K \leq N$ então $(G/K)/(N/K) \cong G/N$.