Resolução da primeira prova **Introdução à Álgebra 2019-1**

1. **Exercício 1 [2 pontos]**.

   Um grupo G é chamado de metabeliano se existe $N \trianglelefteq G$ abeliano tal que G/N é abeliano. Seja G um grupo metabeliano e sejam $H \leq G$, $K \trianglelefteq G$.

   - (1 ponto) Mostre que H é metabeliano.
   - (1 ponto) Mostre que G/K é metabeliano. [Considere NK/K.]

   Item 1. Seja $L = H \cap N$. É claro que L é abeliano, sendo um subgrupo do grupo abeliano N. Pelo segundo teorema de isomorfismo $H/L \cong HN/N$, e sendo $HN/N \leq G/N$ e G/N abeliano, HN/N é abeliano logo H/L é abeliano.

   Item 2. Seja $L = NK/K$. Como $L \cong N/N \cap K$ é um quociente de N e N é abeliano, L é abeliano. Pelo terceiro teorema de isomorfismo o quociente

   $$\frac{G/K}{NK/K} \cong \frac{G}{NK} \cong \frac{G/N}{NK/N}$$

   é abeliano sendo G/N abeliano.

2. **Exercício 2 [2 pontos]**.

   Seja G um grupo agindo de maneira transitiva sobre um conjunto X e seja H o estabilizador de um $\alpha \in X$, $H = Stab_G(\alpha) = \{g \in G \ : \ g\alpha = \alpha\}$. Seja $K \leq G$, obviamente K age sobre X. Mostre que

   - (1 ponto) se $KH = G$ então a ação de K sobre X é transitiva,
   - (1 ponto) se a ação de K sobre X é transitiva então $KH = G$.

   Item 1. Seja $\beta \in X$. Precisamos encontrar $k \in K$ tal que $k\alpha = \beta$. Sabemos que existe $g \in G$ tal que $g\alpha = \beta$ pois a ação de G é transitiva. Sendo $G = KH$ existem $k \in K$ e $h \in H$ tais que $g = kh$. Como H é o estabilizador de α temos $h\alpha = \alpha$ logo $\beta = g\alpha = kh\alpha = k\alpha$.

   Item 2. Seja $g \in G$, precisamos mostrar que $g \in KH$. Considerando o elemento $g\alpha \in X$, como a ação de K é transitiva existe $k \in K$ tal que $k\alpha = g\alpha$, daí $k^{-1}g\alpha = \alpha$, ou seja $k^{-1}g \in Stab_G(\alpha) = H$, logo existe $h \in H$ tal que $k^{-1}g = h$ ou seja $g = kh$.

3. **Exercício 3 [2 pontos]**.

   Seja G um grupo finito.

   - (1 ponto) Mostre que se $|G| = 48$ então G não é simples.
   - (1 ponto) Mostre que se $|G| = 300$ então G não é simples.

Suponha G simples por contradição.

Se $|G| = 48 = 2^4 \cdot 3$ então um 2-Sylow tem índice 3 logo, pelo teorema de Cayley generalizado, sendo G simples G é isomorfo a um subgrupo de S_3, absurdo pois $|G| = 48 > |S_3| = 6$.

Se $|G| = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ então pelo teorema de Sylow $n_5 = 1$ ou $n_5 = 6$. Se $n_5 = 1$ então o 5-Sylow é normal, contradição. Se $n_5 = 6$ então G é isomorfo a um subgrupo de S_6, em particular $|G| = 300$ divide $6!$, mas isso é um absurdo pois 5^2 divide 300 mas não divide $6!$.

4. **Exercício 4 [1 ponto]**.

   Mostre que todo grupo de ordem $45 = 3^2 \cdot 5$ é abeliano.

   Pelo teorema de Sylow $n_3 = 1$ e $n_5 = 1$, segue que existem um 3-Sylow normal A e um 5-Sylow normal B. Sendo $|A|$ e $|B|$ coprimos $A \cap B = \{1\}$ logo $|AB| = |A||B| = |G|$ e G é o produto direto $A \times B$. Mas B é abeliano pois é cíclico (tem ordem prima) e A é abeliano pois tem ordem 3^2 (da forma p^2 com p primo). Segue que G, produto direto de dois grupos abelianos, é abeliano.

5. **Exercício 5 [2 pontos]**.

   Seja G um grupo de ordem $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$. Mostre que G não é simples. [Dica: o normalizador de um 3-Sylow é abeliano?]

   Suponha G simples por contradição. Pelo teorema de Sylow $n_3 = 1, 7, 49$ e $n_3 \neq 1$ pois G é simples. Se $n_3 = 7$ então G é isomorfo a um subgrupo de S_7, em particular $|G|$ divide $7!$ mas isso é um absurdo pois 7^2 divide $|G|$ mas não divide $7!$. Suponha então $n_3 = 49$. Segue que o normalizador $N_G(P)$ de um 3-Sylow P tem índice 49 logo $|N_G(P)| = 3^2 \cdot 5 = 45$. Pelo exercício anterior $N_G(P)$ é abeliano. Como ele contem um 5-Sylow Q, sendo $N_G(P)$ abeliano ele normaliza Q, obtemos que $N_G(Q) \geq N_G(P)$, logo $n_5 = |G : N_G(Q)|$ divide $|G : N_G(P)| = 49$, logo $n_5 \in \{1, 7, 49\}$. O único destes três números que é congruente a 1 módulo 5 é 1, logo $n_5 = 1$, ou seja $Q \trianglelefteq G$, contradição (G é simples).

6. **Exercício 6 [1 ponto]**.

   Seja p um número primo e sejam $N = C_p \times C_p$, $H = C_p = \langle h \rangle$ com a ação de H sobre N dada por $h(x, y)h^{-1} = (xy, y)$, e por consequência

$$h^i(x, y)h^{-i} = (xy^i, y) \qquad \forall i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Seja $G = N \rtimes H$ o produto semidireto correspondente. Determine os elementos do centro de G.

Um elemento $(a,b)h^j$ está no centro se e somente se comuta com todo $(x,y)h^i \in G$, ou seja para todo $(x,y)h^i \in G$ temos

$$(x,y)h^i \cdot (a,b)h^j \cdot ((x,y)h^i)^{-1} = (a,b)h^j$$

ou seja

$$\begin{aligned}(a,b)h^j &= (x,y)h^i(a,b)h^jh^{-i}(x^{-1},y^{-1}) \\ &= (x,y) \cdot h^i(a,b)h^{-i} \cdot h^j(x^{-1},y^{-1})h^{-j} \cdot h^j \\ &= (x,y)(ab^i,b)(x^{-1}y^{-j},y^{-1})h^j \\ &= (ab^iy^{-j},b)h^j.\end{aligned}$$

Segue que $ab^iy^{-j} = a$ para todo $y \in C_p$ e para todo $i \in \{0,1,\dots,p-1\}$. Em particular $ab = a$ logo $b = 1$ e $ay^{-j} = a$ para todo $y \in C_p$, ou seja $y^j = 1$ para todo $y \in C_p$, ou seja $j = 0$. Segue que $(a,b)h^j = (a,1)$. Por outro lado o elemento $(a,1)$ está no centro porque para todo $(x,y)h^j$ temos

$$\begin{aligned}(x,y)h^i \cdot (a,1) \cdot ((x,y)h^i)^{-1} &= (x,y) \cdot h^i(a,1)h^{-i} \cdot (x^{-1},y^{-1}) \\ &= (x,y)(a,1)(x^{-1},y^{-1}) = (a,1).\end{aligned}$$

Em conclusão

$$Z(G) = \{(a,1) \ : \ a \in C_p\}$$

tem ordem p.