Resolução da Primeira Prova de Álgebra 3 do dia 19/09/2019

1. (1 ponto) Seja G um grupo que age de maneira transitiva sobre um conjunto X com $|X| \geq 2$, e sejam $\alpha, \beta \in X$ distintos. Sejam H o estabilizador de α em G e K o estabilizador de β em G. Mostre que $HK \neq G$. [Dica: use a transitividade com α e β.]

   Suponha $HK = G$ por contradição. Seja $g \in G$ tal que $g\beta = \alpha$. Existem $h \in H$, $k \in K$ tais que $g = hk$, logo $\alpha = g\beta = hk\beta = h\beta$, segue que $\beta = h^{-1}\alpha = \alpha$ pois $h^{-1} \in H$. Contradição.

   ERRO COMUM: "HK é subgrupo de G se e somente se um entre H e K é um subgrupo normal de G". Isso é falso, por exemplo se $H = K$ estaria dizendo que "H é subgrupo de G se e somente se H é um subgrupo normal de G", obviamente falso. A caracterização correta é a seguinte: HK é subgrupo de G se e somente se $HK = KH$.

2. (1 ponto) Diga se existe uma ação transitiva do grupo simétrico S_6 sobre $X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

   Pelo princípio da contagem se G age transitivamente sobre X então $|X|$ é igual ao índice do estabilizador em G de um elemento de X, em particular $|X|$ divide $|G|$. Como X tem tamanho 7 e S_6 tem ordem $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, S_6 não pode agir transitivamente sobre X pois 7 não divide $6!$.

3. (1 ponto) Seja G um grupo cíclico de ordem 6. Diga se existe uma ação fiel de G sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Sim porque G é isomorfo ao grupo cíclico $\langle (123)(45) \rangle \leq S_5$. Observe que essa ação não é transitiva.

4. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem 28. Mostre que G não é simples.

   $28 = 2^2 \cdot 7$. Pelo teorema de Sylow n_7 divide 4 e é congruente a 1 módulo 7, segue que $n_7 = 1$, logo G contem um 7-Sylow normal.

5. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem 48. Mostre que G não é simples.

   Sendo $48 = 2^3 \cdot 3$ um 2-Sylow P de G tem índice 3. Se G é simples $P_G = \{1\}$ logo o teorema de Cayley generalizado implica que $G \cong G/P_G$ é isomorfo a um subgrupo de S_3, absurdo pois $|G| = 48 > |S_3| = 6$.

6. (1 ponto) Seja $p \geq 3$ um número primo e seja G um grupo de ordem $17^2 \cdot p$. Mostre que G não é simples.

   Se $p = 17$ então G é um 17-grupo finito logo $Z(G) \neq \{1\}$, seja $g \in Z(G)$ de ordem 17 (existe pelo teorema de Cauchy), então $N = \langle g \rangle$ é um subgrupo normal de G de ordem 17, logo G não é simples. Suponha $p \neq 17$. Então n_p divide 17^2, logo $n_p \in \{1, 17, 17^2\}$. Sendo $n_p \equiv 1 \mod p$ e $p \geq 3$ deduzimos $n_p = 17^2$, logo G contem $17^2(p-1)$ elementos de ordem p, segue que G contem exatamente $|G| - 17^2(p-1) = 17^2$ elementos de ordem diferente de p. Mas isso implica que tem espaço para apenas um 17-Sylow, logo $n_{17} = 1$.

   Obviamente podia-se também resolver assim, no caso $p \neq 17$: $n_p = 17^2$ é congruente a 1 módulo p, logo p divide $17^2 - 1 = 288 = 2^5 \cdot 3^2$ logo sendo $p \geq 3$ deduzimos $p = 3$, e um 17-Sylow P tem índice 3. Como G é simples $P_G = \{1\}$ logo pelo teorema de Cayley generalizado $G \cong G/P_G$ é isomorfo a um subgrupo de S_3, absurdo pois $|G| > |S_3|$.

7. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Mostre que G contem um subgrupo normal de ordem 27 ou 81.

   Seja P um 3-Sylow de G. Pelo teorema de Cayley generalizado G/P_G é isomorfo a um subgrupo de S_4, por outro lado G/P_G contem o 3-subgrupo P/P_G, e sendo $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$ segue que $|P/P_G| \in \{1, 3\}$, ou seja $|P_G| = |P| = 81$ ou $|P_G| = |P|/3 = 27$. Segue que P_G é um subgrupo normal de G de ordem 27 ou 81.

8. (2 pontos) Seja G um grupo de ordem $2^n \cdot 31$, onde $n \geq 1$ é um número natural. Seja P um 2-Sylow de G e seja X o conjunto dos 2-Sylow de G. O grupo P age sobre X por conjugação.

   (a) Mostre que se $|X| \neq 1$ então existe $Q \in X$ tal que $|P : P \cap Q| = 2$.
   Como $|X| = n_2$ divide 31 e é diferente de 1 temos $|X| = 31$. Pela equação das órbitas aplicada à ação de P sobre X, sendo $|X| = 31 \not\equiv 1$ mod 4 existe uma P-órbita $O \subseteq X$ de tamanho 2. Seja $Q \in O$, então $2 = |O| = |P : N_P(Q)|$. Por outro lado $N_P(Q) \leq Q$ sendo que $N_P(Q)$ é um 2-subgrupo de G que normaliza o 2-Sylow Q. Segue que $N_P(Q) \leq P \cap Q \leq P$ e sendo $|P : N_P(Q)| = 2$ deduzimos $N_P(Q) = P \cap Q$ (não pode ser $P \cap Q = P$ pois P não está contido em Q, sendo $|P| = |Q|$ e P, Q distintos). Segue que $|P : P \cap Q| = 2$.

   (b) Mostre que G não é um grupo simples.
   Seja $H = N_G(P \cap Q)$. Temos $|P \cap Q| = 2^{n-1}$ logo $P \cap Q$ tem índice 2 em P e em Q, segue que $P \cap Q$ é normal em P e em Q, logo $P, Q \leq H$. Mas $H \neq P$ pois P não contem Q, logo $P < H \leq G$ e sendo $|G : P| = 31$ primo segue $H = G$ ou seja $P \cap Q \trianglelefteq G$, e sendo G simples segue $P \cap Q = \{1\}$, e sendo $|P \cap Q| = 2^{n-1}$ isso implica que

$n = 1$. Segue que $|G| = 2 \cdot 31$ e um 31-Sylow é normal (tem índice 2), contradição.

9. (1 ponto) Seja G um grupo de ordem $5 \cdot 7 \cdot 11$ e seja $H \leq G$ tal que $|G : H| = 5$. Mostre que $H \trianglelefteq G$.

   G/H_G é isomorfo a um subgrupo de S_5. Como $|S_5| = 5!$ segue que $|G/H_G|$ divide $5!$. Segue que 7 e 11 não dividem $|G : H_G|$ logo dividem $|H_G|$, e isso implica que $|H_G|$ é divisível por $7 \cdot 11 = |H|$, por outro lado $H_G \leq H$, logo $H_G = H$.