Segunda prova **ÁLGEBRA 1 Turma B** **19/10/2017**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Cada exercício vale um ponto.

1. Seja $C_{30} = \langle x \rangle$ o grupo cíclico de ordem 30. calcule a ordem de x^{25}.

2. Conte os elementos de ordem 12 no grupo cíclico C_{30}.

3. Seja i a unidade imaginária em $\mathbb{C}$ (ou seja $i^2 = -1$). Calcule a ordem multiplicativa do elemento $z = (i-1)/\sqrt{2}$.

4. Seja $G = U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ o grupo das classes módulo 10 que admitem inverso multiplicativo. Diga se G é cíclico.

5. Conte os subgrupos de $U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$.

6. Sejam $G = C_{10}$ o grupo cíclico de ordem 10, $H = \{g^2 \ : \ g \in G\}$ o conjunto dos elementos da forma g^2 onde $g \in G$. Calcule $|H|$.

7. Seja $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0\}$ com a operação seguinte.

$$(x, y) \star (z, w) := (xz, xw + yz).$$

   Mostre que G com a operação definida acima é um grupo (ou seja mostre que a operação dada é associativa, que existe o elemento neutro e que existem os inversos). [Dica: mostre que o elemento neutro é $(1, 0)$.]

8. Seja G o grupo definido no item anterior. Mostre que

$$H = \{(x, y) \in G \ : \ x = 1\}$$

   é um subgrupo de G.

9. Seja G um grupo finito e seja D o conjunto dos elementos de ordem 2 em G. Mostre que $D \neq \emptyset$ se e somente se $|G|$ é par.

   [Dica: G é união dos conjuntos $\{g, g^{-1}\}$ onde $g \in G$ e se g tem ordem 2 então $g^{-1} = g$.]

10. Seja G um grupo **cíclico** e sejam A, B, C subgrupos de G com $A \neq G$, $B \neq G$ e $C \neq G$. Mostre que $A \cup B \cup C \neq G$.