Resolução segunda prova de álgebra 1 (Turma B) semestre 2017-1.

1. Seja $C_{30} = \langle x \rangle$ o grupo cíclico de ordem 30. calcule a ordem de x^{25}.

   Temos $o(x^{25}) = 30/MDC(25, 30) = 30/5 = 6$.

2. Conte os elementos de ordem 12 no grupo cíclico C_{30}.

   Como 12 não divide $30 = |C_{30}|$, C_{30} não contem elementos de ordem 12.

3. Seja i a unidade imaginária em $\mathbb{C}$. Calcule a ordem multiplicativa do elemento $(i-1)/\sqrt{2}$.

   Seja $z = (i-1)/\sqrt{2}$. Temos $z^2 = -i$ logo $z^8 = (z^2)^4 = 1$ daí $o(z)$ divide 8. Sendo $z^2 = -i \neq 1$ e $z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1 \neq 1$ obtemos $o(z) = 8$.

4. Seja $G = U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ o grupo das classes módulo 10 que admitem inverso multiplicativo. Diga se G é cíclico.

   $G = U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = \{1, 3, 7, 9\}$. G tem ordem 4 e $3^2 = 9 \neq 1$, logo $o(3) = 4 = |G|$ e isso implica que G é cíclico, $G = \langle 3 \rangle$.

5. Conte os subgrupos de $U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$.

   Pelo item anterior $U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ é cíclico de ordem 4 logo o número de subgrupos dele é igual ao número de divisores de 4, ou seja 3 (os divisores de 4 são 1, 2 e 4).

6. Sejam $G = C_{10}$ o grupo cíclico de ordem 10, $H = \{g^2 \ : \ g \in G\}$ o conjunto dos elementos da forma g^2 onde $g \in G$. Calcule $|H|$.

   Escrevendo $G = C_{10} = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9\}$ temos $H = \{1^2, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}, x^{12}, x^{14}, x^{16}, x^{18}\} = \{1, x^2, x^4, x^6, x^8\}$ (sendo $x^{10} = 1$, $x^{12} = x^2$, $x^{14} = x^4$, $x^{16} = x^6$, $x^{18} = x^8$) logo $|H| = 5$.

7. Seja $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0\}$ com a operação seguinte.

$$(x, y) \star (z, w) := (xz, xw + yz).$$

Mostre que G com a operação definida acima é um grupo.

Propriedade associativa:

$(x, y) \star ((z, w) \star (u, t)) = (x, y) \star (zu, zt + wu) = (xzu, x(zt + wu) + yzu)$

$((x, y) \star (z, w)) \star (u, t) = (xz, xw + yz) \star (u, t) = (xzu, xzt + (xw + yz)u)$

são iguais.

Elemento neutro: $(1, 0)$, de fato $(x, y) \star (1, 0) = (x1, x0 + y1) = (x, y)$ e $(1, 0) \star (x, y) = (1x, 1y + 0x) = (x, y)$.

Inverso: $(x, y) \star (z, w) = (1, 0)$ significa $(xz, xw + yz) = (1, 0)$ logo basta escolher $z = 1/x$ e $w = -yz/x$. Ou seja $(x, y)^{-1} = (1/x, -y/x^2)$.

8. Seja G o grupo definido no item anterior. Mostre que $H = \{(x, y) \in G \ : \ x = 1\}$ é um subgrupo de G.

$(1, 0) \in H$ escolhendo $y = 0$. O inverso de $(1, y)$ é $(1, -y)$ logo pertence a H. Se $(1, y), (1, w) \in H$ então $(1, y) \star (1, w) = (1, y + w) \in H$.

9. Seja G um grupo finito e seja D o conjunto dos elementos de ordem 2 em G. Mostre que $D \neq \emptyset$ se e somente se $|G|$ é par.

[Dica: considere os conjuntos $\{g, g^{-1}\}$ onde $g \in G$ e lembre-se que se g tem ordem 2 então $g^{-1} = g$.]

Se $D \neq \emptyset$ então G contem elementos de ordem 2, logo 2 divide $|G|$ (teorema de Lagrange) logo $|G|$ é par. Se $|G|$ é par considere os conjuntos $X_g = \{g, g^{-1}\}$. Se por contradição G não contem elementos de ordem 2 então $|X_g| = 2$ para todo $g \neq 1$, e sendo G a união disjunta $\{1\} \cup \bigcup_{1 \neq g \in G} X_g$ obtemos que $|G| - 1$ é par, uma contradição.

10. Seja G um grupo cíclico e sejam A, B, C subgrupos de G com $A \neq G$, $B \neq G$ e $C \neq G$. Mostre que $A \cup B \cup C \neq G$.

Sendo G cíclico, admite um gerador, $G = \langle x \rangle$. Se fosse $A \cup B \cup C = G$ então x pertenceria a um entre A, B, C (por definição de união, sendo $x \in G$). Por exemplo suponha $x \in A$ (os outros dois casos são analogos). Então $x^m \in A$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ (porque A é um subgrupo de G) logo $\langle x \rangle \subseteq A$ mas sendo $\langle x \rangle = G$ isso implica $G = A$, uma contradição.