Segunda prova **ÁLGEBRA 2 Turma A** **24/05/2016**

Nome e matricula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [3 pontos]**

   Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de aneis comutativos unitários e seja J um ideal de B.

   (a) (1.5 ponto) Mostre que $I = f^{-1}(J) := \{x \in A \ : \ f(x) \in J\}$ é um ideal de A.

   (b) (1.5 ponto) Mostre que se B/J é um domínio de integridade então A/I é um domínio de integridade.

2. **Exercício 2 [3.5 pontos]**

   Seja $J := \{(x - 2y) + i(2x + y) \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

   (a) (0.8 ponto) Mostre que

   $$f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

   $$f(a + ib) := a + 2b + 5\mathbb{Z}$$

   é homomorfismo de aneis.

   (b) (0.8 ponto) Mostre que $\ker(f) = J$.

   (c) (0.9 ponto) Mostre que J é um ideal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.

   (d) (1 ponto) Mostre que J é principal e encontre um gerador de J.

3. **Exercício 3 [3.5 pontos]**

   Considere o ideal principal I de $\mathbb{R}[X]$ gerado pelo polinômio $P(X) = X^3 - 2X^2 + X$ (em outras palavras, $I = (P(X))$) e seja $A := \mathbb{R}[X]/I$.

   (a) (0.5 ponto) Escreva a fatoração de $P(X)$ em irredutíveis em $\mathbb{R}[X]$.

   (b) (1 ponto) Encontre o inverso de $X + 1 + I$ em A.

   (c) (1 ponto) Conte os ideais de A.

   (d) (1 ponto) Encontre $a \in A$ tal que $a \neq 0$ e $a^2 = 0$.