Segunda prova **ÁLGEBRA 3 Turma A** **29/11/2018**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. Descreva as correspondências de Galois entre $M/\mathbb{Q}$ e o seu grupo de Galois $G = \mathscr{G}(M/\mathbb{Q})$ onde M é o corpo de decomposição contido em $\mathbb{C}$ de $f(X)$ nos casos seguintes.

   (a) (1.5 ponto) $f(X) = X^2 + 2$ (é irredutível).

   (b) (1.5 ponto) $f(X) = X^3 - 8$ (não é irredutível).

   (c) (2 pontos) $f(X) = X^3 - 4$ (é irredutível).

   (d) (2 pontos) $f(X) = X^4 - 3X^2 + 4$ (é irredutível).
   [Dica: se α é raíz de $f(X)$ então $\beta = 2/\alpha$ é raíz de $f(X)$. Mostre que os elementos não identicos de G têm estruturas cíclicas $(\alpha, -\alpha)(\beta, -\beta)$, $(\alpha, \beta)(-\alpha, -\beta)$, $(\alpha, -\beta)(-\alpha, \beta)$.]

2. Seja M o corpo de decomposição contido em $\mathbb{C}$ de $f(X) = X^4 - 3X^2 + 4$ e seja $\alpha \in M$ uma raíz de $f(X)$. Lembre-se que chamando de G o grupo de Galois $\mathscr{G}(M/\mathbb{Q})$ a norma de um elemento $m \in M$ é

$$N_{M/\mathbb{Q}}(m) := \prod_{g \in G} g(m).$$

   (a) (1 ponto) Calcule a norma de α.

   (b) (1 ponto) Calcule a norma de $\alpha + 2/\alpha$.
   [Dica: a igualdade $\alpha^4 = 3\alpha^2 - 4$ pode ser escrita $1/\alpha^2 = (3 - \alpha^2)/4$ ou também $\alpha^2 + 4/\alpha^2 = 3$.]

3. (1 ponto) Seja $f(X)$ um polinômio irredutível de grau 4 e sejam M o corpo de decomposição de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ e $\alpha \in M$ uma raíz de $f(X)$. Mostre que se $\mathscr{G}(M/\mathbb{Q}) \cong S_4$ então os únicos subcorpos de $\mathbb{Q}(\alpha)$ são $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\alpha)$.