Segunda prova **Introdução à Álgebra 2019-1** **05/06/2019**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Cada item vale 1 ponto.

1. Seja I um ideal de um anel comutativo unitário A e defina $\sqrt{I}$ (o radical de I) como o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n \in I$.
   (a) Mostre que $\sqrt{I}$ é um ideal de A contendo I.
   (b) Dados dois ideais I, J de A defina IJ como o ideal de A **gerado** por $S = \{ij \ : \ i \in I, \ j \in J\}$, ou seja a interseção dos ideais de A contendo S. Sabemos que
   $$IJ = \{i_1 j_1 + \ldots + i_n j_n \ : \ n \in \mathbb{N}, \ i_1, \ldots, i_n \in I, \ j_1, \ldots, j_n \in J\}.$$
   Mostre que
   $$\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$
   É verdade que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$?
   (c) Lembre-se que se $a, b \in A$ definimos $(a,b) = \{ax+by \ : \ x, y \in A\} \trianglelefteq A$. Sejam $A = \mathbb{Z}[X]$ e $I = (2, X)$, $J = (3, X)$. Mostre que $IJ = (6, X)$. Neste caso IJ é igual a $\{ij \ : \ i \in I, \ j \in J\}$?

2. Mostre que $K = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + X + 2)$ é um corpo e encontre um gerador do grupo multiplicativo cíclico $K^* = K - \{0\}$.

3. O polinômio $X^3 + 2X + 5$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$?

4. Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

5. Seja E/F uma extensão de corpos e seja $\alpha \in E$. Seja $f(X) \in F[X]$ um polinômio não nulo tal que $f(\alpha) = 0$. $F[X]/(f(X))$ é isomorfo a $F[\alpha]$? Lembre-se que $F[\alpha] = \{P(\alpha) \ : \ P(X) \in F[X]\}$.

6. Seja $P(X) = X^4 - 3X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Mostre que $P(X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$ e que admite uma raiz real.
   (b) Calcule o grau de um corpo de decomposição M de $P(X)$ sobre $\mathbb{Q}$, ou seja calcule $|M : \mathbb{Q}|$.

7. Seja $K = \mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Seja $P(X) = X^4 + 6X^2 + 1 \in K[X]$. Calcule o grau de um corpo de decomposição de $P(X)$ sobre K.