

## Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

Todos os corpos considerados contêm  $\mathbb{Q}$  como subcorpo.

- (1) (3 pontos) Para cada um dos polinômios  $f(X)$  seguintes seja  $M$  um corpo de decomposição de  $f(X)$  sobre  $\mathbb{Q}$  e seja  $G := \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$  o grupo de Galois de  $M/\mathbb{Q}$ . Encontre a estrutura de  $G$ .
- (a) (1 ponto)  $f(X) = X^3 - 1$ .
  - (b) (1 ponto)  $f(X) = X^4 - 3X^2 + 2$ .
  - (c) (1 ponto)  $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ .

- (2) (1 ponto) Descreva as correspondências de Galois para  $M/\mathbb{Q}$  onde  $M$  é corpo de decomposição sobre  $\mathbb{Q}$  para  $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ .

- (3) (1 ponto) Seja  $G = \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$  o grupo de Galois de  $M/\mathbb{Q}$  onde  $M$  é corpo de decomposição de  $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Sejam  $\alpha, \beta$  raízes de  $f(X)$  em  $M$  tais que  $\gamma := \alpha + \beta \neq 0$ . Calcule a norma

$$N(\gamma) = N_{M/\mathbb{Q}}(\gamma) = \prod_{g \in G} g(\gamma).$$

- (4) (2 pontos) Seja  $M/K$  extensão de Galois de grau 3 com grupo de Galois  $G = \langle \sigma \rangle \cong C_3$ . Defina o traço de um elemento  $\alpha \in M$  como sendo

$$T(\alpha) = T_{M/K}(\alpha) = \sum_{g \in G} g(\alpha).$$

Seja  $a \in M$  e suponha  $T(a) = 0$ .

- (a) (0.5 ponto) Calcule  $T(1)$ .
  - (b) (0.5 ponto) Mostre que existe  $c \in M$  tal que  $T(c) = 1$ .
  - (c) (1 ponto) Seja  $b := ac + a\sigma(c) + \sigma(ac)$ . Mostre que  $b - \sigma(b) = a$ .
- (5) (3 pontos) Seja  $M/K$  uma extensão de Galois finita.
- (a) (1 ponto) Se  $M \neq K$  e os únicos subcorpos de  $M$  contendo  $K$  são  $M$  e  $K$ ,  $|M : K|$  é um número primo?
  - (b) (1 ponto) Se  $|M : K| = 15$ , existe sempre um subcorpo  $L$  de  $M$  tal que  $K < L < M$  e tal que  $L/K$  é extensão de Galois?
  - (c) (1 ponto) Se  $M$  é corpo de decomposição sobre  $K$  para um polinômio  $f(X) \in K[X]$ , o grau de  $f(X)$  divide  $|M : K|$ ?