Resolução terceira prova de Álgebra 1 (Turma D, 04/07/2017).

1. **Exercício 1 [2 pontos]**. Mostre por indução que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

A base da indução é dada por $n = 1$, temos que $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = 1/2$ e $\frac{1}{1+1} = 1/2$ são iguais.

Mostraremos agora que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ implica $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$. Suponha que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

2. **Exercício 2 [3 pontos]**

(a) (1.5 ponto). Faça a divisão com resto entre os polinômios $X^3 + X + 1$ e $X + 1$ em $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{array}{c|c}
X^3 + X + 1 & X + 1 \\
X^3 + X^2 & X^2 - X + 2 \\
\hline
-X^2 + X + 1 & \\
-X^2 - X & \\
\hline
2X + 1 & \\
2X + 2 & \\
\hline
-1 &
\end{array}$$

O quociente é $X^2 - X + 2$, o resto é -1.

(b) (1.5 ponto). Sejam $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $P(X) = X^2 + 5 \in K[X]$, $J = (P(X))$ o ideal principal de $K[X]$ gerado por $P(X)$.
Conte os ideais I de $K[X]$ tais que $I \supseteq J$.

As raizes de $P(X)$ em K são 3 e 4 logo $P(X) = (X-3)(X-4)$. Daí os ideais de $K[X]$ contendo $(P(X))$ são (1), $(X-3)$ e $(X-4)$ e (X^2+5) (são os ideais gerados pelos divisores mônicos de $P(X)$). Tem exatamente quatro ideais de $K[X]$ contendo $(P(X))$.

3. **Exercício 3 [2 pontos]**.

   (a) (1 ponto) Escreva a lista de todos os polinômios de grau 2 em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

   Se trata dos polinômios aX^2+bX+c com $a,b,c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. Temos então

$$X^2,\ X^2+1,\ X^2+2,\ X^2+X,\ X^2+2X,$$

$$X^2+X+1,\ X^2+2X+1,\ X^2+X+2,\ X^2+2X+2,$$

$$2X^2,\ 2X^2+2,\ 2X^2+1,\ 2X^2+2X,\ 2X^2+X,$$

$$2X^2+2X+2,\ 2X^2+X+2,\ 2X^2+2X+1,\ 2X^2+X+1.$$

   (b) (1 ponto) Quantos deles são irredutíveis?

   Como se trata de polinômios de grau 2, ser redutível para eles significa admitir uma raiz em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Logo temos que identificar os polinômios da lista que não admitem raizes em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Se trata de

$$X^2+1,\ X^2+X+2,\ X^2+2X+2,\ 2X^2+2,\ 2X^2+2X+1,\ 2X^2+X+1.$$

4. **Exercício 4 [3 pontos]**. Seja K um corpo (ou seja, um anel comutativo unitário em que todo elemento não nulo admite inverso multiplicativo) e considere $A = K \times K = \{(a,b) \ : \ a,b \in K\}$. Definamos as operações seguintes

$$\textit{Soma}: \qquad (a,b)+(c,d) := (a+c, b+d),$$

$$\textit{Produto}: \quad (a,b)*(c,d) := (ac+bd, ad+bc+bd).$$

   Se trata de operações associativas e comutativas, e os elementos neutros são $(0,0)$ (da soma) e $(1,0)$ (do produto). O inverso aditivo de (a,b) é $(-a,-b)$. Não precisa mostrar isso.

   (a) (1 ponto). Mostre que A é um anel comutativo unitário. [Basta mostrar a propriedade distributiva.]

$$(a,b)((c,d)+(e,f)) = (a,b)(c+e,d+f)$$
$$= (a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e)+b(d+f)),$$

$$\begin{aligned} &(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f) \\ &= (ac+bd, ad+bc+bd)+(ae+bf, af+be+bf) \\ &= (ac+bd+ae+bf, ad+bc+bd+af+be+bf) \end{aligned}$$

são iguais pois $a(c+e)+b(d+f) = ac+bd+ae+bf$ e $a(d+f)+b(c+e)+b(d+f) = ad+bc+bd+af+be+bf$.

(b) (1 ponto). Mostre que se $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ então A é um corpo. [Dica: escreva a lista dos elementos de A.]
Se $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ então

$$A = K \times K = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Precisamos verificar que todo elemento diferente de $(0,0)$ admite inverso, lembrando da definição de produto e que o elemento neutro do produto é $(1,0)$. Temos $(1,0)(1,0) = (1,0)$, $(0,1)(1,1) = (1,0)$. Logo o inverso de $(1,0)$ é $(1,0)$, o inverso de $(0,1)$ é $(1,1)$ e o inverso de $(1,1)$ é $(0,1)$.

(c) (1 ponto). Mostre que se $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ então A não é um corpo. [Dica: considere o elemento $(2,1)$.]

O elemento $(2,1)$ é não nulo (é diferente de $(0,0)$) e não admite inverso. De fato se por contradição existissem $x, y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ com $(2,1)(x,y) = (1,0)$ então por definição de produto $2x+y=1$, $2y+x+y=0$ ou seja $2x+y=1$ e $3y+x=0$. A primeira equação pode ser escrita $y = 1-2x$ e substituindo na segunda equação $3-6x+x=0$ ou seja $3=0$ absurdo.