Terceira prova **ÁLGEBRA 1 Turma B** **30/11/2017**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (2 pontos) Mostre por indução que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

   para todo $n \geq 1$.

2. (2 pontos) Conte os ideais de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$ contendo $(X^3 - 2)$.

3. (1 ponto) Faça a divisão com resto entre $X^3 - 2X^2 + X - 2$ e $X^2 - 4$ em $\mathbb{Q}[X]$.

4. (1 ponto) Calcule a fatoração de $X^3 - X - 6$ em $\mathbb{Q}[X]$.

5. (4 pontos) Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais.
   Considere $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ com as operações

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w), \qquad (x, y) \cdot (z, w) = (xz, xw + yz).$$

   Temos que A é um anel comutativo unitário com tais operações (não precisa mostrar isso). Os elementos neutros da soma e do produto são $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Sejam

$$I_1 = \{(x, y) \in A \ : \ x = 0\}, \qquad I_2 = \{(x, y) \in A \ : \ y = 0\}.$$

   (a) Mostre que $(x, y) \in A$ admite inverso multiplicativo se e somente se $x \neq 0$ e calcule o inverso de (x, y) neste caso.
   (b) Mostre que I_1 é ideal de A.
   (c) Mostre que I_2 não é ideal de A.
   (d) Mostre que os únicos ideais de A são $\{(0, 0)\}$, I_1 e A. [Dica: o que acontece se um ideal I de A contem um elemento inversível?]