

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.

Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. Exercício 1 [2 pontos].

Faça a divisão com resto entre $X^3 + X^2 + 1$ e $X + 2$ em $\mathbb{Q}[X]$.

2. Exercício 2 [1 ponto].

Faça a divisão com resto entre $X^3 + 1$ e $2X + 1$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

3. Exercício 3 [1 ponto].

Resolva a equação $x^2 \equiv 2x \pmod{8}$.

4. Exercício 4 [1 ponto].

Escreva a lista dos polinômios de grau 3 em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

5. Exercício 5 [5 pontos]. Considere o conjunto $A = \mathbb{Z}$ dos números inteiros com as operações

$$\text{Soma} \quad a \oplus b := a + b - 3,$$

$$\text{Produto} \quad a \star b := 3a + 3b - ab - 6.$$

- (a) Mostre que $a \star (b \oplus c) = (a \star b) \oplus (a \star c)$ para todo $a, b, c \in A$ (ou seja a propriedade distributiva).
- (b) Mostre que \oplus e \star são associativas.
- (c) Encontre $d, e \in A$ tais que $a \oplus d = a$, $a \star e = a$ para todo $a \in A$ (ou seja os elementos neutros de \oplus e \star).
- (d) A é um corpo?
- (e) $I = \{2x - 3 : x \in A\}$ é um ideal de A ?