Terceira prova **ÁLGEBRA 2 Turma A** **30/06/2016**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. **Exercício 1 [3 pontos]** Seja $K = \mathbb{F}_3[X]/I$ onde $I = (X^2 + 2X + 2)$.
   (a) (1 ponto) Mostre que K é um corpo e calcule $|K|$.
   (b) (1 ponto) Mostre que $\alpha := X + I$ é um gerador do grupo multiplicativo cíclico $K^* = K - \{0\}$.
   (c) (1 ponto) Encontre $a, b \in \mathbb{F}_3$ tais que $(\alpha + 2)^{-1} = a + b\alpha$.
2. **Exercício 2 [2 pontos]**
   Mostre que os polinômios seguintes são irredutíveis em $\mathbb{Z}[X]$ e em $\mathbb{Q}[X]$.
   (a) (1 ponto) $X^4 - 6X^2 + 6$
   (b) (1 ponto) $X^3 + 4X - 1$
3. **Exercício 3 [3 pontos]**
   Seja $\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{3}} \in \mathbb{C}$.
   (a) (1 ponto) Mostre que α é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) (1 ponto) Calcule o grau $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
   (c) (1 ponto) Calcule o grau $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$.
4. **Exercício 4 [1 ponto]**
   Seja $E/\mathbb{F}_2$ uma extensão de corpos e sejam $P(X) \in \mathbb{F}_2[X]$, $\alpha \in E$. Mostre que se $P(\alpha) = 0$ então $P(\alpha^2) = 0$. [Dica: mostre que $P(\alpha)^2 = P(\alpha^2)$.]
5. **Exercício 5 [1 ponto]**
   Mostre que $X^2 + 2$ divide $P(X) = X^{25} - X$ em $\mathbb{F}_5[X]$. [Dica: considere $F = \mathbb{F}_5[X]/(X^2 + 2)$.]