Terceira prova **Introdução à Álgebra 2019-1** **01/07/2019**

Nome e matrícula:

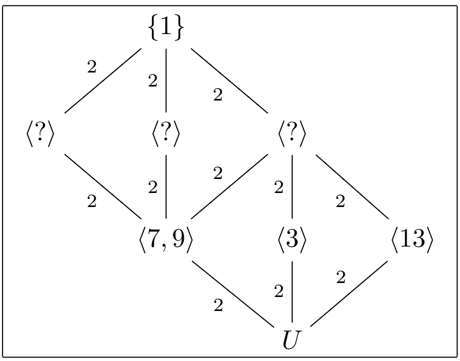
Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

(1) Seja $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ irredutível de grau 3.
   (a) (1 ponto) Seja F uma extensão de $\mathbb{F}_3$ tal que $|F| = 81$. Diga se existe $\alpha \in F$ tal que $f(\alpha) = 0$. [Dica: qual é o grau $|\mathbb{F}_3(\alpha) : \mathbb{F}_3|$?]
   (b) (1 ponto) Mostre que $f(X)$ divide $X^{27} - X$ em $\mathbb{F}_3[X]$. [Dica: considere um corpo $\mathbb{F}_3(\alpha)$ onde $f(\alpha) = 0$.]

(2) Sejam $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{6}} \in \mathbb{R}$, $\beta = \sqrt{10 + \sqrt{10}} \in \mathbb{R}$.
   (a) (1 ponto) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ é extensão de Galois?
   (b) (1 ponto) $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ é extensão de Galois?

(3) Sejam $\alpha = i + \sqrt{5}$, $M = \mathbb{Q}(\alpha)$, $G = \mathscr{G}(M/\mathbb{Q}) = \{g_1, \dots, g_m\}$.
   (a) (1 ponto) Mostre que M é corpo de decomposição do polinômio $f(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) (1 ponto) Descreva as correspondências de Galois de $M/\mathbb{Q}$.
   (c) (1 ponto) Calcule $g_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot g_m(\alpha)$.

(4) (2 pontos) Seja $u = e^{i2\pi/16} = \cos(2\pi/16) + i \sin(2\pi/16)$, raiz de $\Phi_{16}(X) = X^8 + 1$, irredutível em $\mathbb{Q}[X]$. Seja $G = \mathscr{G}(\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q})$. Para todo $H \leq G$ determine geradores do corpo H' correspondente a H por meio das correspondências de Galois. O reticulado dos subgrupos de $U = U(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ é o seguinte:



[Lembre-se que todo elemento de G é do tipo g_h determinado pela igualdade $g_h(u) = u^h$, onde $h \in U$.]

(5) (1 ponto) Uma extensão de corpos é dita abeliana se o seu grupo de Galois é abeliano. Seja M/K uma extensão de Galois de grau finito e sejam $L, T \in [M/K]$ corpos intermediários tais que L/K e T/K são extensões de Galois. Suponha L/K e T/K abelianas e suponha $\langle L, T \rangle = M$, ou seja o corpo gerado por L e T é igual a M. Mostre que M/K é abeliana.