Prova escrita de Representação de grupos 1 - 25/10/2017

Nome e matrícula:

Em todas as questões o corpo base é $\mathbb{C}$.

(1) (2 pontos) Seja G um grupo **abeliano** finito e sejam $\chi_1, \ldots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis de G. Para $i \in \{1, \ldots, k\}$ seja

$$v_i = \sum_{x \in G} \chi_i(x) x \in \mathbb{C}[G].$$

(a) (1 ponto) Mostre que $\langle v_i \rangle = \{\lambda v_i \;:\; \lambda \in \mathbb{C}\}$ é um $\mathbb{C}[G]$-submódulo do $\mathbb{C}[G]$-módulo regular $\mathbb{C}[G]$.

(b) (1 ponto) Seja $A = \mathbb{C}[C_4]$ a álgebra grupo do grupo cíclico de ordem 4. Encontre geradores dos A-submodulos irredutíveis do A-módulo regular A.

(2) (4 pontos) Calcule a tabela dos caracteres de $S_3 \times C_4$.

(3) (2 pontos) Seja $G = C_5 \rtimes C_4$ o produto semidireto entre $C_5 = \langle t \rangle$ e $C_4 = \langle s \rangle$ com a ação $t^s = t^2$ (ou seja $s^{-1}ts = t^2$ no produto semidireto). Calcule a tabela dos caracteres de G.
[Dica 1: como $\langle s \rangle$ tem indice 5 é claro que $C_G(s) = \langle s \rangle$.]
[Dica 2: observe que $sts^{-1} = t^3$.]

(4) (1 ponto) Sejam x, y elementos de um grupo finito G. Mostre que x e y são conjugados em G se e somente se $\chi(x) = \chi(y)$ para todo caráter irredutível χ de G.
[Dica: pense na tabela dos caracteres de G.]

(5) (1 ponto) Seja G um grupo com tabela de caracteres seguinte

G	a	b	c	d	e	f
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	i	$-i$	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1
χ_4	1	-1	$-i$	i	1	-1
χ_5	2	-2	0	0	-1	1
χ_6	2	2	0	0	-1	-1

Conte os elementos de G de ordem 6.