Prova escrita de Representação de grupos 1 - 25/10/2017

Resolução.

(1) (2 pontos) Seja G um grupo **abeliano** finito e sejam $\chi_1, \dots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis complexos de G. Para $i \in \{1, \dots, k\}$ seja

$$v_i = \sum_{x \in G} \chi_i(x) x \in \mathbb{C}[G].$$

(a) (1 ponto) Mostre que $\langle v_i \rangle = \{\lambda v_i \ : \ \lambda \in \mathbb{C}\}$ é um $\mathbb{C}[G]$-submódulo do $\mathbb{C}[G]$-módulo regular $\mathbb{C}[G]$.

Basta mostrar que $v_i g$ é um múltiplo escalar de v_i para todo $g \in G$. Para isso usaremos o fato que sendo G abeliano os χ_i são caracteres lineares, ou seja homomorfismos de grupos $G \to \mathbb{C}^*$. Definindo $y = xg$ temos

$$v_i g = \sum_{x \in G} \chi_i(x) xg = \sum_{y \in G} \chi_i(yg^{-1}) y = \chi_i(g^{-1}) \sum_{y \in G} \chi_i(y) y = \chi_i(g^{-1}) v_i.$$

(b) (1 ponto) Seja $A = \mathbb{C}[C_4]$ a álgebra grupo do grupo cíclico de ordem 4. Encontre geradores dos A-submodulos irredutíveis do A-módulo regular A.

Escrevamos $C_4 = \langle t \rangle$. A álgebra A é uma soma direta de A-módulos irredutíveis pelo teorema de Maschke, e todos eles têm dimensão 1 sendo C_4 abeliano (pelo lema de Schur), logo

$$A = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle v_3 \rangle \oplus \langle v_4 \rangle$$

onde os $\langle v_i \rangle$ são submodulos. Isso significa exatamente que $v_i g \in \langle v_i \rangle$, ou seja $v_i g$ é um múltiplo escalar de v_i, para todo $g \in C_4$. Pelo item anterior temos já quatro vetores com essa propriedade, são $\sum_{x \in C_4} \chi_i(x) x$ para $i = 1, 2, 3, 4$ onde os χ_i são os caracteres irredutíveis de C_4. Lembrando que a tabela dos caracteres de C_4 é

C_4	1	t	t^2	t^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

obtemos a decomposição acima com $v_1 = 1 + t + t^2 + t^3$, $v_2 = 1 + it - t^2 - it^3$, $v_3 = 1 - t + t^2 - t^3$, $v_4 = 1 - it - t^2 + it^3$.

(2) (4 pontos) Calcule a tabela dos caracteres de $S_3 \times C_4$.

Seja $G = S_3 \times C_4$. Temos $G/G' \cong C_2 \times C_4$ que tem ordem 8 e podemos já deduzir todos os caracteres lineares. G contem $k(S_3)k(C_4) = 3 \cdot 4 = 12$ classes de conjugação e temos pelo menos o caráter irredutível de grau 2 deduzido por inflação por meio da projeção canônica $G \to S_3$. Os demais 3 caracteres são obtidos multiplicando por caracteres lineares. Escrevamos $a = (12) \in S_3$, $b = (123) \in S_3$, $C_4 = \langle t \rangle$. Os elementos de G são da forma t^m, at^m e bt^m com $m = 0, 1, 2, 3$ e $G' = \langle b \rangle$. Obtemos que a tabela é

	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
G	1	a	b	t	at	bt	t^2	at^2	bt^2	t^3	at^3	bt^3
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	i	i	i	-1	-1	-1	$-i$	$-i$	$-i$
χ_3	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_4	1	1	1	$-i$	$-i$	$-i$	-1	-1	-1	i	i	i
χ_5	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
χ_6	1	-1	1	i	$-i$	i	-1	1	-1	$-i$	i	$-i$
χ_7	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_8	1	-1	1	$-i$	i	$-i$	-1	1	-1	i	$-i$	i
χ_9	2	0	-1	2	0	-1	2	0	-1	2	0	-1
χ_{10}	2	0	-1	$2i$	0	$-i$	-2	0	1	$-2i$	0	i
χ_{11}	2	0	-1	-2	0	1	2	0	-1	-2	0	1
χ_{12}	2	0	-1	$-2i$	0	i	-2	0	1	$2i$	0	$-i$

Especificamente $\chi_{10} = \chi_2\chi_9$, $\chi_{11} = \chi_3\chi_9$, $\chi_{12} = \chi_4\chi_9$.

(3) (2 pontos) Seja $G = C_5 \rtimes C_4$ o produto semidireto entre $C_5 = \langle t \rangle$ e $C_4 = \langle s \rangle$ com a ação $t^s = t^2$ (ou seja $s^{-1}ts = t^2$ no produto semidireto). Calcule a tabela dos caracteres de G.

[Dica 1: como $\langle s \rangle$ tem indice 5 é claro que $C_G(s) = \langle s \rangle$.]

[Dica 2: observe que $sts^{-1} = t^3$.]

Sejam $N = C_5$, $H = C_4$. Sendo $t^s = t^2$ os conjugados de t são t, t^2, t^4, $t^8 = t^3$ ou seja a classe de conjugação de t é $N - \{1\}$. A ação é $t^s = t^2$ ou seja $s^{-1}ts = t^2$. Isso implica $sts^{-1} = (s^{-1})^4ts^4 = (t^2)^4 = t^8 = t^3$. Temos $s^t = t^{-1}st = t^{-1}sts^{-1}s = t^{-1}t^3s = t^2s$ e com isso podemos calcular os outros conjugados de s: $s^{t^2} = (s^t)^t = (t^2s)^t = t^2s^t = t^4s$, $s^{t^3} = (s^{t^2})^t = (t^4s)^t = t^4s^t = t^6s = ts$, $s^{t^4} = (s^{t^3})^t = (ts)^t = ts^t = t^3s$. Isso implica que os conjugados de s são s, ts, t^2s, t^3s, t^4s. Um argumento analogo mostra que os conjugados de s^2 são os t^ms^2 com $m = 0, 1, 2, 3, 4$ e os conjugados de s^3 são t^ms^3 com $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Logo podemos escolher como representantes de classes de conjugação 1, t, s, s^2, s^3. G tem então 5 classes de conjugação e $G/\langle t \rangle \cong C_4$ é abeliano logo $G' \subseteq \langle t \rangle \cong C_5$ e isso implica $G' = \langle t \rangle$ (pois 5 é primo e $G' \neq \{1\}$). Temos então 4 caracteres lineares e um caráter não linear que então tem que ter grau 4 (pois $4^2+1^2+1^2+1^2+1^2=20=|G|$). Usando $G/G' \cong C_4$ podemos deduzir os caracteres lineares e a última linha é calculada usando as relações de ortogonalidade.

	1	4	5	5	5
G	1	t	s	s^2	s^3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	$-i$	-1	i
χ_5	4	-1	0	0	0

(4) (1 ponto) Sejam x, y elementos de um grupo finito G. Mostre que x e y são conjugados em G se e somente se $\chi(x) = \chi(y)$ para todo caráter irredutível complexo χ de G.

[Dica: pense na tabela dos caracteres de G.]

Se x e y são conjugados então $\chi(x) = \chi(y)$ para todo caráter irredutível χ de G porque os caracteres são funções de classe. Agora suponha x e y não conjugados. Então eles correspondem a colunas distintas da tabela dos caracteres de G logo tais colunas são ortogonais (pela segunda relação de ortogonalidade), ou seja $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0$, isso implica que não pode ser $\chi(x) = \chi(y)$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ pois $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x)\overline{\chi(x)} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(x)|^2$ é diferente de zero sendo $\chi_1(x) = 1$.

(5) (1 ponto) Seja G um grupo com tabela de caracteres complexa seguinte

G	a	b	c	d	e	f
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	i	$-i$	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1
χ_4	1	-1	$-i$	i	1	-1
χ_5	2	-2	0	0	-1	1
χ_6	2	2	0	0	-1	-1

Conte os elementos de G de ordem 6.

Temos $|G| = 1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2 = 12$ e $|G/G'| = 4$ logo $|G'| = 3$. Além disso a segunda relação de ortogonalidade implica que a e b estão no centro de G (eles têm um conjugado), c e d têm 3 conjugados, e e f têm 2 conjugados. Logo $Z(G) = \{a, b\} = \{1, b\}$, o que implica obviamente que b tem ordem 2 (sendo $|Z(G)| = 2$) e G contem um subgrupo normal $Z(G)G'$, cíclico de ordem 6 (um gerador é o produto entre b e um gerador de G', tem ordem 6 porque b pertence ao centro de G). Sendo $|C_G(c)| = |C_G(d)| = 4$, c e d não podem ter ordem 6 (porque $c \in C_G(c)$ e $d \in C_G(d)$). Segue que a, b, c, d têm ordem uma potência de 2. Por outro lado 3 divide $|G|$ logo G tem elementos de ordem 3 e como visto G tem elementos de ordem 6, isso implica que não é verdade que ambos e e f têm ordem 6 (pelo menos um entre a, b, c, d, e, f tem que ter ordem 3). Logo a única possibilidade é que um entre e e f tenha ordem 6 e o outro ordem 3. Isso mostra que G contem exatamente 2 elementos de ordem 6 (os geradores do subgrupo normal $G'Z(G)$).