Dinâmica, Geometria e Simetria
– Lista de exercícios do Minicurso –

André Caldas, Mauro Patrão e Lucas Seco

Resumo

Nesse minicurso, vamos apresentar um panorama geral e acessível de assuntos relacionadas à pesquisa do grupo de Sistemas Dinâmicos da UnB. Vamos focar em exemplos interessantes e apresentar as partes mais simples das técnicas e demonstrações.

Nas primeiras três aulas, vamos falar sobre dois tipos de sistemas dinâmicos onde as simetrias aparecem de maneira natural. O primeiro tipo é a dinâmica de translações em variedades flag, bem exemplificado pela dinâmica de uma matriz agindo em direções no espaço projetivo. Conseguimos dar uma caracterização completa dos comportamentos transiente e recorrente. Isso era conhecido apenas no caso de uma matriz diagonal ou conforme. O segundo tipo é a dinâmica de um endomorfismo de um grupo de Lie, bem exemplificado pela aplicação elevar ao quadrado nos complexos menos a origem. Conseguimos dar uma caracterização completa da entropia topológica, dada pelo princípio variacional. Isso era conhecido apenas no caso de grupos compactos. Para isso, apresentaremos na aula anterior a entropia topológica e seu princípio variacional, o que era conhecido apenas para espaços compactos.

Nas duas últimas aulas, vamos falar sobre a geometria de espaços com bastante simetria. Na quarta aula, após relembrarmos a noção de métrica invariante pela ação de um grupo de Lie, descrevemos todas as métricas invariantes em variedades flag de formas reais normais, o que era conhecido apenas para variedades flags complexas. Na última aula, vamos mostrar como contar as geodésicas ligando dois pontos de um grupo de Lie compacto com uma métrica biinvariante, o que era conhecido apenas para as geodésicas minimizantes de grupos simplismente conexos.

1 Translações em espaços projetivos

1. Considere $\mathbb{PR}^n$ o conjunto dos subespaços reais de dimensão 1 pela origem de $\mathbb{R}^n$ e denote por $[v] = \mathbb{R}v$ o subespaço real gerado pelo vetor $v \in \mathbb{R}^n - 0$. Considere o círculo S^1 como a compactificação da reta real $\mathbb{R}$ por um ponto ∞ no infinito, mostre que a aplicação inclinação

$$\mathbb{PR}^2 \to S^1 \qquad [(x, y)] \mapsto \frac{y}{x}$$

é uma bijeção bem definida.

2. Considere agora $\mathbb{PC}^n$ o conjunto dos subespaços complexos de dimensão 1 pela origem de $\mathbb{C}^n$ e denote por $[v] = \mathbb{C}v$ o subespaço complexo gerado pelo vetor complexo $v \in \mathbb{C}^n - 0$. Considere a esfera S^2 como a compactificação do plano complexo $\mathbb{C}$ por um ponto ∞ no infinito, mostre que a aplicação inclinação complexa

$$\mathbb{PC}^2 \to S^2 \qquad [(z, w)] \mapsto \frac{w}{z}$$

é uma bijeção bem definida.

3. Considere um isomorfismo linear $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Faça os itens abaixo.

   (a) Mostre que $g^{\mathbb{P}} : \mathbb{PR}^n \to \mathbb{PR}^n$, dada por $g^{\mathbb{P}}[v] = [gv]$, está bem definida.

   (b) Mostre que $\mathrm{Fix}\left(g^{\mathbb{P}}\right)$ é o conjunto dos $[v]$ onde v é autovetor de g.

   (c) Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ denote por $[V] = \{[v] : v \in V - 0\} \subset \mathbb{PR}^n$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores reais de T e $V_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^n : Tv = \lambda_i v\}$ os autoespaços correspondentes. Mostre que $\mathrm{Fix}\left(g^{\mathbb{P}}\right) = \bigcup_i [V_{\lambda_i}]$ é uma união disjunta.

   (d) Mostre que os itens anteriores também valem trocando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.

4. Considere um isomorfismo linear $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que, quando visto como matriz complexa n por n é diagonalizável com autovalores complexos $\lambda \in \mathbb{C}$ de norma $|\lambda| = 1$. Mostre que existe um produto interno em $\mathbb{R}^n$ tal que e é isometria. Dica: Usando a forma canônica de Jordan real de e, para cada autovalor $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}$ aparecem apenas blocos $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ na diagonal da matriz de Jordan de e.

5. Considere uma aplicação linear $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é diagonalizável com autovalores reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e autoespaços V_{λ_i}.

(a) Mostre que uma aplicação linear $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comuta com H se, e só se, X deixa invariante os autoespaços de H, isto é, $XV_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Dica: Use que $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$).

(b) Escolha uma base para cada V_{λ_i}. Mostre que a união dessas bases fornece uma base de $\mathbb{R}^n$ que diagonaliza H de modo que a matriz de H é dada por blocos na diagonal da forma λ_i vezes a identidade, com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Mostre as matrizes reais n por n que comutam com essa matriz de H são dadas por blocos na diagonal do mesmo tamanho que os da matriz de H, porém com entradas arbitrárias.

6. (a) Considere $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ e mostre que $u^t = e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Denotando $(u^t)^{\mathbb{P}}$ por u^t, mostre que u^t do item anterior agindo em $\mathbb{PR}^2$ ou em $\mathbb{PC}^2$ tem como único ponto fixo a direção $[(1,0)]$ e que todo $[v]$ satisfaz $u^t[v] \to [(1,0)]$ quando $t \to \pm\infty$.

(c) Esboce a dinâmica do item anterior no círculo $\mathbb{PC}^1$ e na esfera $\mathbb{PC}^2$. Dica: Use o Exercício 1 dessa aula e que $[(1,0)] \mapsto 1/0 =$ o ponto no infinito.

(d) Seja N uma matriz nilpotente n por n e considere $u^t = e^{tN}$ agindo em $\mathbb{PR}^n$ ou em $\mathbb{PC}^n$. Mostre que $u^t[v] \to \mathrm{Fix}(u^t) = [$ 0-autoespaço de $N]$, quando $t \to \pm\infty$. Dica: Use a forma canônica de Jordan de N.

7. Sejam X, Y matrizes n por n reais ou complexas e denote por $[X, Y] = XY - YX$ seu comutador. Considere $\mathrm{ad}(X)$ a transformação linear de matrizes n por n dada por $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$. O objetivo desse exercício é mostrar que

$$\mathrm{e}^X Y \mathrm{e}^{-X} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(X)} Y$$

onde no lado esquerdo temos a exponencial de matrizes e no lado direito temos a exponencial de uma transformação linear de matrizes.

(a) Mostre que a curva de matrizes $a(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}(X)} Y$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz o PVI: $a'(t) = \mathrm{ad}(X) a(t)$, $a(0) = Y$.

(b) Mostre que a curva de matrizes $b(t) = \mathrm{e}^{tX} Y \mathrm{e}^{-tX}$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz o PVI: $b'(t) = \mathrm{ad}(X) b(t)$, $b(0) = Y$.

(c) Usando a unicidade de solução dos PVIs dos itens anteriores, fazendo $t = 1$, conclua o desejado.

(d) Use o item (b) para concluir que $[X, Y]$ é a derivada da conjugação gYg^{-1} em $g = 1$ na direção de X, isto é, $(\mathrm{e}^{tX} Y \mathrm{e}^{-tX})'_{t=0} = \mathrm{ad}(X)Y$.

8. (a) Se H é uma matriz diagonal na base canônica e_i do espaço, mostre que $\mathrm{ad}(H)$ é uma matriz diagonal na base canônica E_{ij} das matrizes. Dica: A matriz E_{ij} tem uma entrada 1 na linha i e coluna j e tem todas as outras entradas zero. Se H tem entradas diagonais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, mostre que $\mathrm{ad}(H)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$.

   (b) Se N é nilpotente, mostre que $\mathrm{ad}(N)$ é nilpotente. Dica: Observe que $\mathrm{ad}(N)^k Y = [N, \cdots, N, [N, Y]]$ = soma de termos da forma $N^r Y N^s$ com $r + s = k$. Se $N^p = 0$, conclua que $\mathrm{ad}(N)^{2p} = 0$.

Referências

[1] M. Patrão e L. Seco. “The Minimal Morse Components of Translations on Flag Manifolds are Normally Hyperbolic”. Em: *Journal of Dyn. and Diff. Equations* (2017), pp. 1–15.

[2] T. Ferraiol, M. Patrão e L. Seco. “Jordan Decomposition and Dynamics on Flag Manifolds”. Em: *Discrete Contin. Dynam. Systems A* 26.3 (2010), pp. 923–947.

[3] M. Patrão, L.A.B. San Martin e L. Seco. “Conley Index and Stable Sets for Flows on Flag Bundles”. Em: *Dyn. Syst.* 24 (2009), pp. 249–276.

[4] G. Ammar e C. Martin. “The Geometry of Matrix Eigenvalues Methods”. Em: *Acta Appl. Math.* 5 (1986), pp. 239–278.

[5] J.J. Duistermat, J.A.C. Kolk e V.S. Varadarajan. “Functions, Flows and Oscilatory Integral on Flag Manifolds”. Em: *Compos. Math.* 49 (1983), pp. 309–398.

[6] R. Hermann e C. Martin. “Lie and Morse Theory for Periodic Orbits of Vector Fields and Matrix Riccati Equations, II”. Em: *Math. Systems Theory* 16 (1983), pp. 307–317.

[7] R. Hermann e C. Martin. “Lie and Morse Theory for Periodic Orbits of Vector Fields and Matrix Riccati Equations, I”. Em: *Math. Systems Theory* 15 (1982), pp. 277–284.

[8] C. Pugh e M. Shub. “Linearization of Normally Hyperbolic Diffeomorphisms and Flows”. Em: *Invent. Math.* 10 (1970), pp. 187–198.

2 Entropia Topológica em Não-Compactos

1. Mostre que, nos seguintes casos, μ é T-invariante.

   (a) $$\begin{array}{rccc} T: & [0,1) & \to & [0,1) \\ & x & \mapsto & 2x \pmod 1 \end{array}$$
   μ: medida de Lebesgue.

   (b) $$\begin{array}{rccc} T: & S^1 & \to & S^1 \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array}$$
   μ: medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$ normalizada (dividida por 2π).

   (c) $$\begin{array}{rccc} T: & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ & (x_j) & \mapsto & (x_{j+1}) \end{array}$$
   μ: medida produto $\rho^{\mathbb{N}}$, onde $\rho(\{0\}) = \rho(\{1\}) = \frac{1}{2}$.

2. Calcule $h\left(T, \mathscr{C}\right)$ para a transformação T do exercício 1b, onde

$$\mathscr{C} = \left\{ \left\{ \mathrm{e}^{2\pi\theta i} \,\middle|\, \theta \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \right\} \,\middle|\, n = 0, 1 \right\}.$$

   Depois, calcule $h_\mu\left(T, \mathscr{C}\right)$.

3. Calcule $h\left(T, \mathscr{A}\right)$ para a transformação T do exercício 1b, onde

$$\mathscr{A} = \left\{ \left\{ \mathrm{e}^{2\pi\theta i} \,\middle|\, \theta \in \left[\frac{n}{2} - \varepsilon, \frac{n+1}{2} + \varepsilon\right) \right\} \,\middle|\, n = 0, 1 \right\},$$

   e ε é suficientemente pequeno.

4. Como $h\left(T\right) > 0$ no exercício 1b, então existem pares de Li-Yorke. Encontre pares que são de Li-Yorke e pares que **não** são de Li-Yorke. **Dica:** Para encontrar pares de Li-Yorke, faça primeiro para o exercício 1c.

5. Encontre uma fórmula para um sistema dinâmico no disco

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leq 1 \right\}$$

   que tenha entropia positiva, mas que quando restrito a $D \setminus S^1$, a entropia seja nula.

Referências

[1] A. Caldas e M. Patrão. "Entropy and Its Variational Principle for Locally Compact Metrizable Systems". Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2016), pp. 1–26. DOI: 10.1017/etds.2016.45.

[2] A. Caldas e M. Patrão. "Dynamics of Endomorphisms of Lie Groups". Em: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 33 (2013), pp. 1351–1363. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.1351.

[3] M. Patrão. "Entropy and its Variational Principle for Non-Compact Metric Spaces". Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 30 (2010), pp. 1529–1542. DOI: 10.1017/S0143385709000674.

[4] F. Blanchard et al. "On Li-Yorke Pairs". Em: *J. Reine Angew. Math* 547 (2002), pp. 51–68.

[5] M. Handel, B. Kitchens e D. Rudolph. "Metrics and Entropy for Non-Compact Spaces". Em: *Israel Journal of Mathematics* 91 (1 1995), pp. 253–271. ISSN: 0021-2172. DOI: 10.1007/BF02761650.

[6] M. Misiurewicz. "A Short Proof of the Variational Principle for a $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$ Action on a Compact Space". Em: *Astérisque* 40 (1976), pp. 147–157.

[7] R. Bowen. "Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces". Em: *Trans. Americ. Math. Soc.* 153 (1971), pp. 401–414. DOI: 10.2307/1995565.

[8] T. Goodman. "Relating Topological Entropy to Measure Entropy". Em: *Bull. London. Math. Soc.* 3 (1971), pp. 176–180. DOI: 10.1112/blms/3.2.176.

[9] E. Dinaburg. "The Relation Between Topological Entropy and Metric Entropy". Em: *Soviet Math. Dokl.* 11 (1969), pp. 13–16.

[10] R. Adler, A. Konheim e M. McAndrew. "Topological Entropy". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 114.2 (1965), pp. 309–319. DOI: 10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9.

[11] Ya. Sinai. "On the Notion of Entropy of a Dynamical System". Em: *Doklady of Russian Academy of Sciences* 124 (1959), pp. 768–771.

3 Entropia de Endomorfismos

1. Dado o isomorfismo linear $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vimos na Seção 1 que $g^{\mathbb{P}} : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \to \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, dada por $g^{\mathbb{P}}[v] = [gv]$, está bem definida e que que $\operatorname{Fix}\left(g^{\mathbb{P}}\right)$ é o conjunto dos $[v]$ onde v é autovetor de g. Usando isso, faça os itens abaixo:

(a) Mostre que $[R(g)] \subset R\left(g^{\mathbb{P}}\right)$.

(b) Use a decomposição de Jordan $g = ehu$, que $R\left(g^{\mathbb{P}}\right) = \mathrm{Fix}\left(u^{\mathbb{P}}\right) \cap \mathrm{Fix}\left(h^{\mathbb{P}}\right)$ e o item anterior para mostrar que $R(g)$ está contido nos auto-espaços de u e também nos auto-espaços de h.

(c) Conclua que $R(g) \subset \mathrm{Fix}\,(u)$ e que $R(g) \subset \mathrm{Fix}\,(h)$.

2. O par (a, b) é de Li-Yorke para a aplicação ϕ se $a \neq b$, $(\phi^{n_k}(a), \phi^{n_k}(b)) \to (a, b)$ e também $(\phi^{n_l}(a), \phi^{n_l}(b)) \to (c, c)$, para algum c. Use o exercício anterior para mostrar que transformações lineares não possuem pares de Li-Yorke. Dica: Observe que se (a, b) é um par de Li-Yorke, então $a, b \in R(g)$ e lembre que e é uma isometria.

3. Considere $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, onde $\phi(z) = z^n$ e faça os itens abaixo:

   (a) Mostre que $R(\phi) \subset S^1$. Dica: Olhe para o valor absoluto.

   (b) Conclua que que $h(\phi) = \log(n)$. Dica: Similar ao caso z^2.

4. Considere $G \leq \mathrm{Gl}(n)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(n)$ e denote por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$ e por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, gerado por $e^{\mathrm{ad}(X)}$, onde $X \in \mathfrak{g}$.

   (a) Mostre que se $\psi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, então $\psi Y = gYg^{-1}$, para algum $g \in G$. Dica: Use que $\psi = e^{\mathrm{ad}(X_1)} \cdots e^{\mathrm{ad}(X_l)}$ e que $e^{\mathrm{ad}(X)}Y = e^X Y e^{-X}$.

   (b) Considere φ um endomorfismo de G tal que $d\varphi_1 \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Mostre que se G é conexo, então $\varphi = C_g$, para algum $g \in G$, onde $C_g(h) = ghg^{-1}$. Dica: Use o item anterior, que $\varphi(e^Y) = e^{d\varphi_1 Y}$, que $e^{gYg^{-1}} = ge^Y g^{-1}$ e que G é gerado por e^Y, onde $Y \in \mathfrak{g}$.

   (c) Conclua que se ϕ um endomorfismo de G tal que $d\phi_1 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ e se $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é finito, então ϕ^k é a restrição de uma transformação linear. Dica: Use o item anterior para mostrar que $\phi^k = C_g$ e observe que isso é a restrição de uma transformação linear do espaço vetorial $\mathfrak{gl}(n)$ de todas as matrizes n por n.

Referências

[1] M. Patrão. "The Topological Entropy of Endomorphisms of Lie Groups". Em: (2017). arXiv: `1711.02562 [math.DS]`.

[2] A. Caldas e M. Patrão. "Dynamics of Endomorphisms of Lie Groups". Em: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 33 (2013), pp. 1351–1363. DOI: `10.3934/dcds.2013.33.1351`.

[3] M. Patrão. “Entropy and its Variational Principle for Non-Compact Metric Spaces”. Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 30 (2010), pp. 1529–1542. DOI: 10.1017/S0143385709000674.

[4] R. Bowen. “Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces”. Em: *Trans. Americ. Math. Soc.* 153 (1971), pp. 401–414. DOI: 10.2307/1995565.

4 Geometria de Flags Reais

1. Considere um grupo K agindo a esquerda num conjunto F, de modo que

$$\begin{aligned} k(lx) &= (kl)x, \qquad \forall k, l \in K, \qquad \forall x \in F \\ 1x &= x, \qquad \forall x \in F \end{aligned}$$

Mostre que a aplicação $\psi : K/M \to F$, dada por $\psi(kM) = kb$, é uma bijeção bem definida, onde $b \in F$ e $M = \{m \in K : mb = b\}$.

2. Considere o ponto b em $F \simeq K/M$, onde M é a isotropia de b, e uma métrica Riemanniana em F. A métrica é K-invariante se satisfaz

$$\langle kX, kY \rangle_{kb} = \langle X, Y \rangle_b \tag{1}$$

para todo $X, Y \in T_bF$ e todo $k \in K$.

   (a) Mostre que, se uma métrica é K-invariante, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ é um produto interno M-invariante em T_bF.

   (b) Mostre que, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ é um produto interno M-invariante em T_bF, então (1) é uma métrica Riemanniana K-invariante bem definida. Dica: Use que, se $kb = lb$, então $l^{-1}k \in M$.

3. Mostre que, se M é um grupo finito agindo como transformações lineares num espaço vetorial com produto interno, então existe um produto interno M-invariante.

4. Considere um espaço vetorial V com um produto interno M-invariante e faça os itens abaixo:

   (a) Dado $v \in V$, mostre que o subespaço gerado pela órbita $Mv = \{mv : m \in M\}$ é M-invariante e também M-irredutível.

   (b) Se $U \subset V$ é um subespaço M-invariante, mostre que o subespaço $U^{\perp}$, dos vetores ortogonais a U, também é M-invariante.

5. Considere $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $(\cdot,\cdot)$ dois produtos internos em $\mathbb{R}^n$. Vamos usar o fato de que existe uma transformação linear T tal que

$$(u,v) = \langle Tu, v\rangle, \qquad \forall u, v$$

para mostrar que se $\mathbb{R}^n$ é M-irredutível e se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $(\cdot,\cdot)$ são M-invariantes, então existe $\lambda > 0$ tal que $T = \lambda I$.

   (a) Mostre que T é $\langle\cdot,\cdot\rangle$-simétrica.

   (b) Conclua que existe um auto-valor $\lambda > 0$ com auto-espaço $V_\lambda \neq 0$. Dica: Use o Teorema Espectral.

   (c) Mostre que V_λ é M-invariante e conclua que $V_\lambda = \mathbb{R}^n$.

   (d) Conclua que $T = \lambda I$.

6. Vimos que $X \in \mathfrak{p}^\perp \mapsto X \cdot P$ é um isomorfismo linear entre $\mathfrak{p}^\perp$ e o espaço tangente $T_P\mathbb{F}$, onde P é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com determinante 1 e $\mathfrak{p}$ é sua álgebra de Lie, dada pelas matrizes triangulares superiores com traço zero.

   (a) Mostre que $\mathfrak{p}^\perp$ é dado pela subálgebra $\mathfrak{n}$ das matrizes triangulares inferiores com zeros na diagonal. Dica: Lembre que o produto interno de matrizes é o produto escalar no $\mathbb{R}^{n^2}$, onde as matrizes são vistas como vetores.

   (b) Conclua que $X \in \mathfrak{n} \mapsto X \cdot P$ é um isomorfismo linear.

7. Denote por α_{kl} a matriz diagonal quadrada com um na entrada kk, menos um na entrada ll e zero nas demais entradas, e por E_{ij} é a matriz quadrada com um na entrada ij e zero nas demais entradas.

   (a) Mostre que $\mathrm{ad}\,(\alpha_{kl})\,E_{ij} = \langle\alpha_{kl}, \alpha_{ij}\rangle E_{ij}$. Dica: Lembre que o produto interno de matrizes diagonais é o produto escalar no $\mathbb{R}^n$, onde suas diagonais são vistas como vetores.

   (b) Use o item anterior para mostrar que $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\,\mathrm{ad}\,(\alpha_{kl})} E_{ij} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\langle\alpha_{kl}, \alpha_{ij}\rangle} E_{ij}$ Dica: Lembre que a exponencial é dada por uma série de potências.

   (c) Use o item anterior para mostrar que $m_{kl} E_{ij} m_{kl}^{-1} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\langle\alpha_{kl}, \alpha_{ij}\rangle} E_{ij}$, onde $m_{kl} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\alpha_{kl}}$. Dica: Use o Exercício 7 da Seção 1.

Referências

[1] V. del Barco, A. Freitas e L. San Martin. "Invariant Almost Complex Structures on Real Flag Manifolds". Em: (2017). arXiv: `1708.01218 [math.DS]`.

[2] M. Patrão e L. San Martin. "The Isotropy Representation of a Real Flag Manifold: split real forms". Em: *Indagationes Mathematicae* 26 (2015), pp. 547–579.

[3] J. Siebenthal. "Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple". Em: *Comment. Math. Helv.* 44 (1969), pp. 1–44.

[4] S. Myers e N. Steenrod. "The Group of Isometries of a Riemannian Manifold". Em: *Annals of Mathematics* 40 (1939), pp. 400–416.

5 Contando geodésicas em grupos compactos

1. (Métricas biinvariantes) Seja $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_u$ uma métrica Riemanniana em $\mathrm{SU}(n)$ e denote por $\langle\cdot,\,\cdot\rangle = \langle\cdot,\,\cdot\rangle_1$ o produto interno na álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$, espaço tangente em $u = 1$. A métrica Riemmaniana é invariante (à esquerda) quando para $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ e $u \in \mathrm{SU}(n)$ temos $\langle uX,\, uY\rangle_u = \langle X,\, Y\rangle$ e biinvariante quando, além disso, temos $\langle Xu,\, Yu\rangle_u = \langle X,\, Y\rangle$.

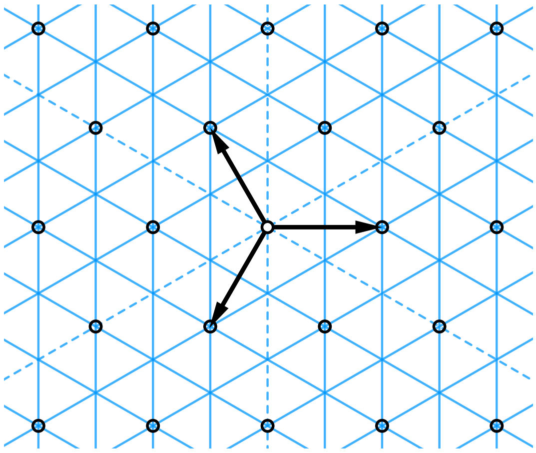
   (a) Mostre que uma métrica invariante em $\mathrm{SU}(n)$ é biinvariante se e só se o produto interno $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ em $\mathfrak{su}(n)$ é invariante por conjugações de $\mathrm{SU}(n)$, isto é, $\langle uXu^{-1},\, uYu^{-1}\rangle = \langle X,\, Y\rangle$, para $u \in \mathrm{SU}(n)$.

   (b) Mostre que $\langle X,\, Y\rangle = \mathrm{tr}\left(X\overline{Y}^t\right)$ é um produto interno nas matrizes complexas n por n que é invariante por conjugações de $\mathrm{SU}(n)$. Mostre que sua restrição à $\mathfrak{su}(n)$ é dada por $-\mathrm{tr}\,(XY)$. Esse é essencialmente o único produto interno em $\mathfrak{su}(n)$ invariante por conjugações de $\mathrm{SU}(n)$ (veja Exercício 4 dessa aula).

2. Considere as matrizes diagonais anti-hermitianas de $\mathfrak{su}(3)$, dadas por

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & i\theta_2 & \\ & & i\theta_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3 \in \mathbb{R} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \end{array} \right\}$$

   O objetivo dessa questão é esboçar a geometria do reticulado $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} :\, e^H = 1\}$ de $\mathrm{SU}(3)$ e do diagrama de $\mathfrak{su}(3)$, como abaixo.



(a) Mostre que os vetores $H_{12} = 2\pi i \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $H_{23} = 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ são uma $\mathbb{R}$-base do subespaço $\mathfrak{t}$ e uma $\mathbb{Z}$-base do reticulado Γ.

(b) Mostre que os vetores do item anterior formam um ângulo de $120°$ entre si, e também com o vetor $H_{13} = 2\pi i \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ e mostre que esses três vetores têm a mesma norma. Esboce o reticulado. Dica: Use o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado no item (b) da questão anterior.

(c) Para saber quando $H \in \mathfrak{t}$ tem autovalores repetidos, consideramos o funcional real $\alpha_{ij}(H) = \theta_i - \theta_j$ dado pela diferença das entradas diagonais $i < j$. Segue que são três funcionais: $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$. Mostre que $\alpha_{ij}(H) = \langle H_{ij}, H \rangle / (2\pi i)$ e, usando isso, esboçe as retas pela origem $\alpha_{ij} = 0$ com traço pontilhado.

(d) Para saber quando $e^H \in T$ tem autovalores repetidos, consideramos as retas transladadas $\alpha_{ij} = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Elas são as chamadas retas do diagrama de $\mathfrak{su}(3)$. Mostre que $\alpha_{ij}(H_{ij}) = 2$ e, usando isso, esboçe as retas do diagrama com traço sólido.

3. (Quatérnios e rotações) Considere os quatérnios $\mathbb{H}$ gerados por $1, i, j, k$ com $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, conjugação $\overline{1} = 1$, $\overline{i} = -i$, $\overline{j} = -j$, $\overline{k} = -k$, produto interno do $\mathbb{R}^4$ e norma ao quadrado $|q|^2 = q\overline{q}$.

(a) Mostre que se $q \in \mathbb{H}$ comuta com todo $p \in \mathbb{H}$ então $q \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que os quaténions S^3 de norma 1 (a 3-esfera de $\mathbb{R}^4$) formam um grupo com o produto herdado dos quatérnios, com inversa $q^{-1} = \overline{q}$ e cujo espaço tangente em 1 são os quatérnios imaginários $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} \mathbb{H}$, subespaço gerado por i, j, k (que são os quatérnios ortogonais à 1). Use o item anterior para mostrar que o centro de S^3 é $\{\pm 1\}$.

(c) Mostre que $q \in S^3$ pode ser escrito na forma $q = \cos\theta + u\,\mathrm{sen}\theta$ onde u é um quatérnio imaginário de norma 1. Usando a exponencial nos quatérnios conclua que $q = e^{u\theta}$.

(d) Dado $q \in S^3$ considere o isomorfismo linear $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $v \mapsto qv\overline{q}$, onde $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$. Escrevendo $q = e^{u\theta}$ mostre que R_q é a rotação de $\mathbb{R}^3$ no plano $u^\perp$ pelo ângulo 2θ.

(e) Use os itens anteriores para concluir que $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$, $q \mapsto R_q$, é um homomorfismo sobrejetor de grupos, com núcleo $\{\pm 1\}$. Isso mostra que S^3 é um recobrimento universal de $\mathrm{SO}(3)$.

(f) Mostre que $\mathrm{SU}(2) \to S^3$, $\left(\begin{smallmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{smallmatrix}\right) \mapsto z + jw$, onde $z, w \in \mathbb{C}$ têm $|z|^2 + |w|^2 = 1$, é um isomorfismo de grupos. Isso mostra que $\mathrm{SU}(2)$ também é um recobrimento universal de $\mathrm{SO}(3)$.

4. Seja $(\cdot, \cdot)$ outro produto interno em $\mathfrak{su}(n)$ que é invariante por conjugações de $\mathrm{SU}(n)$. Os próximos passos mostram que ele é um múltiplo do produto interno $-\mathrm{tr}\,(XY)$ dada no item (b) do Exercício 1 dessa aula. Pelo Exercício 3 da aula 4, é suficiente mostrar que a ação de $\mathrm{SU}(n)$ em $\mathfrak{su}(n)$ por conjugação é irredutível, o que é feito nos próximos passos.

   (a) Seja $0 \neq V \subseteq \mathfrak{su}(n)$ um subespaço invariante por conjugação de $\mathrm{SU}(n)$, derivando mostre que $[\mathfrak{su}(n), V] \subseteq V$. Dica: Use o Exercício 7 (d) da Seção 1.

   (b) Escrevendo $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ como $(X - \overline{X}^t)/2 + i(X + \overline{X}^t)/2i$ mostre que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) \oplus i\mathfrak{su}(n)$. Tomando $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mostre que $[\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), V_\mathbb{C}] \subseteq V_\mathbb{C}$.

   (c) Seja $H \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ matriz diagonal com autovalores λ_i tais que as diferenças $\lambda_i - \lambda_j$ são todas distintas. Usando que $\mathrm{ad}(H)V_\mathbb{C} \subseteq V_\mathbb{C}$, conclua que $V_\mathbb{C}$ contém alguma matriz diagonal ou alguma matriz E_{ij}, $i \neq j$. Dica: Use o Exercício 8 da Seção 1 para obter a decomposição de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ em autoespaços de $\mathrm{ad}(H)$ e, em seguida, obtenha a decomposição de $V_\mathbb{C}$ em autoespaços de $\mathrm{ad}(H)$.

   (d) Se $V_\mathbb{C}$ contém uma matriz diagonal $\neq 0$ mostre que contém alguma matriz da base canônica E_{ij}, $i \neq j$ (Basta fazer colchete dessa matriz diagonal em $V_\mathbb{C}$ com alguma matriz E_{ij} adequada de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, dada pelo Exercício 7(a) da aula 4).

   (e) Fazendo colchete de $E_{ij} \in V_\mathbb{C}$, $i \neq j$, com outras matrizes da forma E_{rs} em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mostre que $V_\mathbb{C}$ contém todas matrizes dessa forma e todas as matrizes diagonais de traço zero, de modo que $V_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Conclua então que $V = \mathfrak{su}(n)$.

Referências

[1] L. Seco e L.A.B. San Martin. "Counting Geodesics on Compact Lie Groups". Em: *Diff. Geom. and Appl.* 562 (2018), pp. 325–343.

[2] F. Kwakkel, M. Martens e M. Peixoto. "Focal Rigidity of Flat Tori". Em: *An. Acad. Brasileira de Ciências* 83.4 (2011), pp. 1149–1158.

[3] M. Takeuchi. "On Conjugate Loci and Cut Loci of Compact Symmetric Spaces I". Em: *Tsukuba J. Math.* 2 (1978), pp. 35–68.

[4] T. Sakai. "On Cut Loci of Compact Symmetric Spaces". Em: *Hokkaido Math. J.* 6 (1977), pp. 136–161.

[5] R. Crittenden. "Minimum and Conjugate Points in Symmetric Spaces". Em: *Canad. J. Math.* 14 (1962), pp. 320–328.

[6] R. Bott. "The Stable Homotopy of the Classical Groups". Em: *Ann. Math., Second Series* 702 (1959), pp. 313–337.