Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ um funtor. A **categoria dos elementos** de F é a categoria $\int^{\mathcal{C}} F$ que tem por objetos os pares (A, x), onde A é um objeto de $\mathcal{C}$ e $x \in FA$. Um morfismo $(A, x) \to (B, y)$ em $\int^{\mathcal{C}} F$ é um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ tal que $Ff(x) = y$. Mostre que $\int^{\mathcal{C}} F$ é de fato uma categoria para qualquer escolha de funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, com as composições e identidades herdadas de $\mathcal{C}$, e que esta construção induz um funtor $\int^{\mathcal{C}} : [\mathcal{C}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Cat}$, onde $\mathbf{Cat}$ é a categoria das categorias pequenas e funtores.

2. Dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, uma **representação** de F é um par (A, x), em que A é um objeto de $\mathcal{C}$ e $x \in FA$ é tal que $\beta(x)$ é um isomorfismo natural $\mathcal{C}(A, -) \to F$, onde β é tal como na demonstração do Lema de Yoneda, isto é, $\beta(x)$ é a transformação natural com B-componente $\beta(x)_B = (f \mapsto Ff(x))$.

    (a) Mostre que a representação de um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é única, a menos de um único isomorfismo, isto é, que se (A, x) e (B, y) são representações de F, então existe um único isomorfismo $f : A \to B$ tal que $Ff(x) = y$;

    (b) Mostre que numa categoria $\mathcal{C}$ localmente pequena o produto de objetos A e B pode ser equivalentemente definido como uma representação do funtor

    $$\mathcal{C}(-, A) \times \mathcal{C}(-, B) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set},$$

    que leva um objeto $C \in \mathbf{C}$ ao conjunto $\mathcal{C}(C, A) \times \mathcal{C}(C, B)$, e um morfismo $f : C \to D$ em $\mathbf{C}$ à função $\mathcal{C}(D, A) \times \mathcal{C}(D, B) \to \mathcal{C}(C, A) \times \mathcal{C}(C, B)$ dada por $(h_1, h_2) \mapsto (h_1 f, h_2 f)$. Conclua que produtos são únicos a menos de único isomorfismo;

    (c) Se $\mathcal{C}$ é localmente pequena e $f, g : A \to B$ são morfismos, há um funtor $\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ cujas representações são precisamente os equalizadores de f e g, como para o produto no item anterior? Justifique.

3. Recorde que um monomorfismo $m : A \rightarrowtail B$ é **regular** quando ele ocorre como um equalizador de um par de morfismos paralelos.

   (a) Dizemos que um morfismo $m : A \rightarrowtail B$ é um **monomorfismo cindido** se existe $n : B \to A$ tal que $nm = 1_A$. Mostre que todo monomorfismo cindido é regular e que todo morfismo que é simultâneamente épico e um monomorfismo regular é um isomorfismo. (*Dica:* utilize dualidade a seu favor);

   (b) Um monomorfismo $m : A \rightarrowtail B$ é um **monomorfismo extremal** se a única maneira de fatorar m como gf com f épico é quando f é um isomorfismo. Mostre que todo monomorfismo regular é extremal;

   (c) Um monomorfismo $m : A \rightarrowtail B$ é **forte** se, dado um diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "r"] \arrow[d, two heads, "n"] & D \arrow[d, tail, "m"] \\ A \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

   com n épico e m mônico, há um morfismo $t : A \to D$ com $mt = s$ e $tn = r$. Mostre que:

   - Nessas circunstâncias, t é necessariamente único;
   - Todo monomorfismo extremal é forte;
   - Todo monomorfismo regular é forte, mas nem todo monomorfismo forte é regular. (*Dica:* Há um contraexemplo numa categoria com 4 objetos.)

4. Se P e Q são conjuntos parcialmente ordenados, pensados como categorias, especificar uma equivalência de categorias entre P e Q é o mesmo que especificar uma **correspondência de Galois**: funções monótonas f e g tais que

$$\forall x \in P, y \in Q : \quad x = gf(x) \ \text{ e } \ fg(y) = y.$$

   Mostre que uma função monótona $f : P \to Q$ é parte de uma correspondência de Galois se, e somente se, f é sobrejetora e $f(x) \leq f(y)$ implica $x \leq y$, $\forall x, y \in P$.

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ um funtor representável. Mostre que:

   - Se $\mathcal{C}$ tem todos os produtos binários, então $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$ para todo par de objetos A e B de $\mathcal{C}$;
   - Se F tem todos os equalizadores então $F(\mathrm{Eq}(f, g)) \cong \mathrm{Eq}(Ff, Fg)$, para todos os morfismos $f, g : A \to B$ de $\mathcal{C}$;

6. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ **reflete isomorfismos** quando, dado um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ tal que $Ff : FA \to FB$ é um isomorfismo, podemos concluir que f é um isomorfismo. Prove que todo funtor cheio e fiel reflete isomorfismos. Conclua que o Princípio de Yoneda é válido: se há um isomorfismo natural $Y(A) \cong Y(B)$, onde Y é o mergulho de Yoneda, então há um isomorfismo entre A e B.