Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

1. Nesta questão desenvolveremos a aritmética de um ponto de vista categórico.

   (a) Verifique que a união disjunta de $A+B$ de dois conjuntos é um coproduto deles em **Set**, e que para todos os objetos A, B e C numa categoria com coprodutos finitos existem isomorfismos $A + B \cong B + A$, $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ e $A + 0 \cong 0$, onde 0 é um objeto inicial (dualmente, mostramos que o produto numa categoria com produtos finitos é comutativo, associativo e unitário a menos de isomorfismo);

   (b) Recorde que um **subobjeto** de um objeto B em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo $A \rightarrowtail B$, a menos de isomorfismo. Mostre que em **Set** $A \leq B$ implica $A + C \leq B + C$ para todo conjunto C. Isso ocorre em qualquer categoria?

   (c) Uma categoria com produtos finitos é **cartesiana fechada** se, para cada objeto A, o endofuntor $- \times A$ tem um adjunto à direita $(-)^A$, chamado de funtor exponencial. Mostre que **Set** é uma categoria cartesiana fechada.

   (d) Mostre que se $\mathcal{C}$ é cartesiana fechada, 1 é um objeto terminal e 0 é um objeto inicial, então existem isomorfismos

   - $A^1 \cong A$, $1^A \cong A$, $A^0 \cong 1$ e $A \times 0 \cong 0$ para todo objeto A;
   - $B^{A\times D} \cong (B^D)^A$ e $(B \times D)^A \cong B^A \times D^A$ para todos os objetos A, B, D;

   (e) Por fim, mostre que a propriedade distributiva $A \times (B+C) \cong (A \times B) + A \times C$ vale para todos os objetos A, B e C numa categoria cartesiana fechada. Conclua que **Set** não é cocartesiana fechada.

2. As questões a seguir tratam da compatificação de Stone-$\check{C}$ech de um espaço topológico.

   (a) (∗) Mostre que a categoria **KHaus** dos espaços compactos de Hausdorff tem equalizadores. Conclua, utilizando o Teorema de Tychonoff, que **KHaus** é completa;

   (b) Mostre que os subobjetos de um espaço $X \in \text{ob}(\textbf{KHaus})$ correspondem (a menos de isomorfismo) aos subespaços fechados de X. Conclua que **KHaus** é bem-potenciada;

   (c) (∗) Mostre o Lema de Urysohn, isto é, que $[0.1]$ com a topologia usual é um coseparador em **KHaus**;

   (d) Mostre que o funtor de inclusão $\textbf{KHaus} \hookrightarrow \textbf{Top}$ preserva todos os limites pequenos. Conclua do fato das categorias serem localmente pequenas que este funtor tem um adjunto à esquerda, o **funtor de compatificação** de Stone-$\check{C}$ech;

   (e) Sabendo que se X é um subespaço de um espaço compacto de Hausdorff Y, então o fecho de X tem cardinalidade limitada por $2^{2^{|X|}}$, prove a existência do funtor de compatificação por meio do Teorema Geral do Funtor Adjunto. *Dica*: considere as funções contínuas $f : X \to Y$ com imagem densa em Y para mostrar que a condição do conjunto-solução é satisfeita por $\textbf{KHaus} \hookrightarrow \textbf{Top}$. Caso esteja com um espírito aventureiro, prove a proposição assumida.