Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

1. Seja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor com $F \dashv G$ e counidade $\epsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$.

   (a) Prove que a counidade ϵ é (pontualmente) épica se, e somente se, G é fiel;

   (b) Prove que G é cheio e fiel se, e somente, ϵ é um isomorfismo natural;

   (c) Mostre que o monóide das transformações naturais $1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$ numa categoria $\mathcal{C}$, denotada $Z(\mathcal{C})$, é comutativa (não se preocupe com questão do tamanho da categoria). Chamamos esse monóide do *centro* de $\mathcal{C}$;

   (d) Mostre que se $(1_{\mathcal{C}}, \eta, \mu)$ é uma mônade, então a unidade η tem de ser um isomorfismo;

   (e) Conclua que se um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tem um adjunto à direita G e existe um isomorfismo natural $1_{\mathcal{C}} \to GF$ (não necessariamente a unidade η da adjunção), então a unidade η também tem de ser um isomorfismo e que F tem de ser cheio e fiel.

2. Lembre que uma subcategoria cheia é *reflexiva* quando seu funtor de inclusão admite um adjunto à esquerda.

   (a) Mostre que o funtor de inclusão de uma subcategoria reflexiva é monádico. *Dica:* Beck.

   (b) Conclua que a subcategoria cheia dos espaços vetoriais de dimensão finita não é uma subcategoria reflexiva de $\mathbf{Vect}_k$. Este é um dos motivos para a álgebra linear ser tão diferente para espaços de dimensão finita e para espaços de dimensão infinita.

3. Seja $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ uma mônade em $\mathcal{C}$. A *categoria de Kleisli* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ tem os mesmos objetos de $\mathcal{C}$, mas um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ é um morfismo $A \to TB$ em $\mathcal{C}$, com a composição $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ em $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ dada por $A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{\mu_C} TC$ em $\mathcal{C}$, e com 1_A em $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ dado por η_A em $\mathcal{C}$.

(a) Prove que a categoria de Kleisli de uma mônade é de fato uma categoria;

(b) Existe um funtor esquecido óbvio $G_{\mathbb{T}} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}$. Mostre que o funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F_{\mathbb{T}}} \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ dado por $A \mapsto A$ nos objetos e que leva $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathcal{C}$ ao morfismo de Kleisli $\eta_B f : A \to B$ é adjunto à esquerda de $G_{\mathbb{T}}$, e que essa adjunção induz a mônade $\mathbb{T}$.

(c) ($\star$) Dada uma mônade $\mathbb{T}$, defina a categoria $\mathbf{Adj}(\mathbb{T})$ cujos objetos são adjunções $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ que induzem a mônade $\mathbb{T}$, e cujos morfismos

$$\left(\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}\right) \xrightarrow{H} \left(\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F'"] & \mathcal{D}' \arrow[l, bend left, "G'"] \end{tikzcd}\right)$$

são funtores $H : D \to D'$ tais que $F' = HF$ e $G = G'H$. Mostre que a categoria de Eilenberg-Moore $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ é um objeto terminal de $\mathbf{Adj}(\mathbb{T})$, enquanto a categoria de Kleisli $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ é um objeto inicial.

4. Uma mônade $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ é dita *idempotente* se satisfaz alguma das seguintes condições:

   (a) A multiplicação μ é um isomorfismo natural;

   (b) Todos os componentes de μ são monomorfismos;

   (c) $T\eta$ é igual a η_T;

   (d) A ação α de qualquer $\mathbb{T}$-álgebra (A, α) é um isomorfismo;

   (e) O funtor esquecido da categoria de Eilenberg-Moore de $\mathbb{T}$ é cheio e fiel;

   (f) Existe uma adjunção $F \dashv G$ que induz a mônade $\mathbb{T}$ e tal que G é cheio e fiel.

   Mostre que essas condições são equivalentes.