Introdução a Teoria das Categorias

José Siqueira

A Teoria das Categorias surgiu em meados dos anos 1940, a partir da obra de S. Eilenberg e S. Maclane como, inicialmente, uma ferramenta para facilitar a expressão e compreensão de conceitos e resultados em Topologia Algébrica. O assunto, que encapsula a idéia de estrutura matemática, evoluiu rapidamente e tomou seu lugar como uma teoria independente, que não só fornece uma estrutura unificada para discutir outros campos da matemática, mas ultrapassa o seu papel inicial como uma linguagem e traz questionamentos próprios.

Este curso pretende introduzir as noções e ferramentas básicas da Teoria de Categorias — as ideias de categoria, dualidade, funtor e transformação natural, limites e colimites, o Lema de Yoneda, adjuncões e os teoremas do funtor adjunto, discutindo também o importante conceito de mônade. Além de permearem diversos assuntos da matemática moderna, como a Geometria Algébrica e a Álgebra, identificar a ocorrência destes conceitos pode simplificar argumentos em outras áreas da matemática e indicar novas definições, sendo de particular interesse a algebristas, topólogos, lógicos e geômetras, com alguns tópicos mais especializados sendo discutidos brevemente ao fim do curso, a título de conhecimento para futuros estudos: categorias monoidais, teoria de topos, categorias abelianas e teorias de Lawvere/geometria diferencial sintética.

Aula 1: Categorias, funtores e transformações naturais

– Categorias: motivação, definição e exemplos;

– Categorias pequenas e localmente pequenas;

– Princípio da Dualidade;

– Funtores: motivação, definição e exemplos, funtores covariantes e contravariantes;

– Transformações naturais: motivação, definição e exemplos, isomorfismos naturais;

– Funtores fiéis e cheios, subcategorias;

– Equivalências de categorias e propriedades categóricas;

– Funtores essencialmente sobrejetores e o lema da equivalência.

Aula 2: Morfismos e objetos especiais, funtores representáveis e o Lema de Yoneda

- Lembre de categorias localmente pequenas;
- Funtores representáveis, representações e exemplos, a categoria de funtores e trans.nat.;
- Lema de Yoneda e o mergulho de Yoneda, comentários;
- Produtos e equalizadores (como representações), objetos iniciais e terminais;
- Monomorfismos, epimorfismos, bimorfismos e categorias balanceadas, exemplo de bimorfismo que não é iso;
- Monos regulares e cisão, lema: split => regular e regular mono+epi = iso;
- Famílias separadoras e detectoras, exemplos;
- Lema: se C tem equalizadores, então detectora $\implies$ separadora; balanceada $\implies$ toda separadora é detectora;
- Objetos projetivos, lema: todo funtor representável é projetivo na categoria de funtores.

Aula 3: Adjunções

- Definição de adjunção por hom–set, exemplos e intuição;
- A categoria de flechas de uma categoria;
- Lema: especificar um adjunto a esquerda para G é o mesmo que especificar um objeto inicial em cada (A $\downarrow$ G);
- Unicidade de adjuntos;
- Composição de adjunções e corolário;
- Lema: identidades triangulares;
- Lema: toda equivalência é uma adjunção;
- Lema: relação entre o adjunto a direita ser fiel ou cheio e a counidade da adjunção;
- Reflexões e subcategorias reflexivas, exemplos.

Aula 4: Limites e colimites

- Definição de diagrama e (co)cone;
- Definição de categoria com (co)limites de formato J;
- Limites/colimites importantes e exemplos;

- Categorias (co)completas e o Teorema de Freyd (construção de limites);
- Preservação, reflexão e criação de limites;
- Lema: funtor esquecido da categoria de funtores cria todos os limites e colimites, corolário;
- Observação: monomorfismos são pullbacks, corolário: se a categoria contradomínio tem pullbacks/pushouts, então transformações naturais são mônicas/épicas sse são ponto a ponto;

Aula 5: Os Teoremas de Funtor Adjunto

- Teorema: Se G tem um adjunto a esquerda, então G preserva limites;
- Lema fundamental da categoria de flechas;
- Lema: especificar objeto inicial equivale a especificar um limite para a identidade;
- Teorema Primordial do Funtor Adjunto e seu problema;
- Teorema Geral do Funtor Adjunto e exemplos;
- Subobjetos e categorias bem–potenciadas;
- Teorema Especial do Funtor Adjunto e exemplo

Aula 6: Mônades 1

- Definição de mônade e comônade;
- Proposição: toda adjunção induz uma mônade;
- A categoria de Eilenberg–Moore de uma mônade;
- Lema: o funtor esquecido da categoria de Eilenberg–Moore tem um adjunto e essa adjunção induz a mônade original;
- A categoria de Kleisli de uma mônade e outra adjunção que a induz;
- A adjunção de Eilenberg–Moore é terminal e a de Kleisli é inicial na categoria das adjunções que induzem uma dada mônade (sem prova).
- Lema: O funtor esquecido da categoria de Eilenberg-Moore cria todos os limites que existem na categoria base e todos os colimites que o funtor da mônade preserva;

Aula 7: Mônades 2

- Lembrete do último lema;
- Definição de funtor monádico;

- Pares reflexivos, coequalizadores cindidos, pares G-cindidos e (co)limites absolutos;
- Lema chave da monadicidade;
- Teorema da Monadicidade de Beck e o Teorema Bruto da Monadicidade;
- Exemplos.

Aula 8: Colimites Filtrados

- Definição de categoria filtrada e colimite filtrado;
- Condição equivalente para uma categoria ser filtrada;
- Lema: uma categoria com colimites filtrados pequenos e colimites finitos é cocompleta;
- Teorema: se J é uma categoria pequena, colim_J comuta com todos os limites finitos em **Set** se e somente se J é filtrada;
- Funtores finitários e finitamente apresentáveis;
- Exemplos.

Aula 9: Categorias Abelianas 1

- Definição de categoria pontuada, semi–aditiva e aditiva;
- Definição de objeto zero e de biproduto;
- Lema: numa categoria pontuada, todo objeto inicial é terminal e numa categoria semi-aditiva todo (co)produto induz um biproduto;
- Lema da unicidade da estrutura semi-aditiva;
- Corolário: um funtor entre categorias semi-aditivas é semi-aditivo se e somente se preserva biprodutos finitos;
- Definição de kernel, cokernel, morfismos normais e pseudo-mônicos e exemplos;
- Lema: numa categoria pontuada com kernels e cokernels, um morfismo é mônico normal se e somente se é o kernel de seu cokernel;
- Definição de imagem de um morfismo;
- Proposição: se uma categoria é pontuada com todos os kernels e cokernels e todo monomorfismo é normal, então todo morfismo tem uma imagem (o kernel de seu cokernel);
- Corolário: primeiro teorema do isomorfismo.

- Definição de Categoria Abeliana;
- Exemplos

Aula 10: Categorias Abelianas 2

- Lema do achatamento do quadrado e seu corolário;
- Sequências e funtores exatos;
- O Lema dos 5;
- O Lema da Serpente;
- Complexos de cadeia e objetos de homologiaç
- Teorema de Meyer–Vietoris;
- Homotopia de complexos e morfismos induzidos em homologia;
- Objetos projetivos e resoluções projetivas;
- Funtores derivados.

Aula 11: Categorias Monoidais 1

- Categorias, funtores e transformações monoidais;
- Exemplos;
- Adjunções monoidais e o Teorema da Adjunção Doutrinal;
- Teorema da Coerência para categorias monoidais (sem prova);
- Categoriais monoidais fechadas e duais;
- Exemplos
- (co)Monóides e (co)módulos;
- Lema: funtores monoidais preservam monóides;
- Lema: funtores monoidais fortes preservam duais.

Aula 12: Categorias Monoidais 2

- Álgebras e Coálgebras;
- Coideais a esquerda e a direita;
- Notação de Sweedler e diagramas de cordas;
- Teorema Fundamental das Coálgebras;

- Exemplos;
- Categorias Monoidais Trançadas, Funtores Trançados e Categorias Monoidais Simétricas;
- Diagramas de cordas para categorias monoidais trançadas;
- Lema: certos diagramas comutam em toda categoria monoidal trançada;
- Teorema da Coerência para categorias monoidais trançadas (sem prova).

Aula 13: Categorias Monoidais 3

- Produtos tensoriais de monóides;
- Definição de bimonóide;
- Proposição: dado um bimonóide numa categoria monoidal trançada, a categoria de módulos associada é monoidal e o funtor esquecido é monoidal estrito;
- Definição de monóide de Hopf e álgebra de Hopf;
- Monóides (co)comutativos e antimorfismos;
- Lema: a antípoda de uma monóide de Hopf é um antimorfismo de monóides e comonóides;
- Exemplos;
- Teorema: Se V é monoidal trançada e H é uma monóide de Hopf em V, então a categoria de H-módulos a esquerda é fechada e a avaliação e coavaliação são as de V.

Aula 14: Topos

- Categorias cartesianas fechadas e propriamente cartesianas fechadas;
- Lema: Se C é uma categoria pequena, então [C,Set] é cartesiana fechada;
- Topologias de Grothendieck;
- Feixes e definição de Topos de Grothendieck;
- Base para uma topologia de Grothendieck;
- Teorema de Giraud (sem prova);
- Classificadores de subobjetos e definição de Topos Elementar;
- A noção de Topos Elementar generaliza a de Topos de Grothendieck;
- Noções de lógica categórica.

Aula 15: Teorias de Lawvere e Anéis Suaves.

- Definição de Teoria de Lawvere e de modelo de uma Teoria de Lawvere;
- Lema: o funtor esquecido da categoria de modelos de uma Teoria de Lawvere é representável, fiel e reflete isomorfismos;
- A Teoria de Lawvere C^∞ e a categoria dos anéis suaves;
- Lema: A categoria dos anéis suaves é uma subcategoria reflexiva, completa e co-completa;
- Lema: O funtor esquecido da categoria dos anéis suaves tem um adjunto a esquerda;
- Anéis suaves finitamente gerados, finitamente apresentados e determinados por germes;
- Teorema (sem prova): Há um mergulho cheio da categoria das variedades diferenciáveis na categoria oposta dos anéis suaves determinados por germes que preserva pullbacks transversais;
- O Topos de Dubuc e comentários sobre Geometria Diferencial Sintética.

Ementa: categorias, funtores e transformações naturais; o Princípio da Dualidade; o Lema de Yoneda; adjunções; limites e colimites; os Teoremas do Funtor Adjunto; mônades; colimites filtrados; categorias abelianas; categorias monoidais; noções de topos; Teorias de Lawvere e noções de Geomeria Diferencial Sintética.

Bibliografia:

S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer 1971 (segunda edição 1998).
F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra.* Cambridge U.P. 1994
E. Riehl. *Category theory in context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. 2016
A. Joyal and R. Street, *Braided tensor categories.* Advances in Mathematics, vol. 102, 1993
A. Kock. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press 1981 (segunda edição 2006).