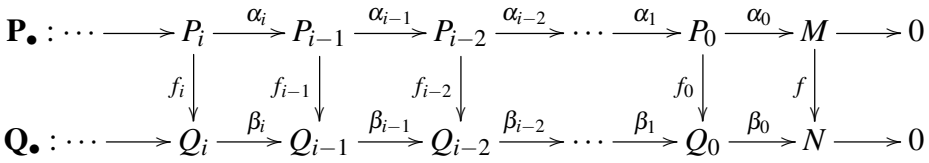
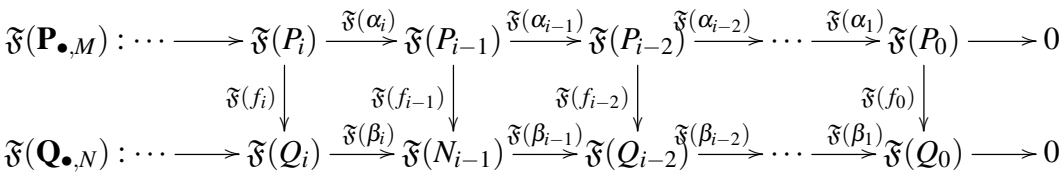


# Introdução a Álgebra Homologica e Módulos Cohen-Macaulay

Victor Hugo Jorge Pérez



*Minicurso Apresentado no XI Workshop de Verão em Matemática Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 2019*

# Conteúdo

# Prefácio

O objetivo principal destas notas é detalhar os conceitos básicos de Álgebra Homologica sobre anéis comutativos e consequêntemente obter alguns resultados fundamentais de anéis regulares e módulos Cohen-Macaulay. Para estudar alguns tipos de anéis o módulos é necesário ter um pouco de connhecimento básico de álgebra homológica, como por exemplo módulos projetivos, injetivos e planos, resoluções injetivas e projetivas, propriedades de funtores, funtores derivados à direita e à esquerda e complexo de Koszul.

# Introdução

# Parte I

# 1. Um pouco de álgebra homológica

Álgebra homológica é o ramo da matemática que estuda os métodos da homologia e da cohomologia em um contexto geral, conceitos esses que se originaram na topologia algébrica.

Teorias cohomológicas têm sido definidas para muitos objetos diferentes como espaços topológicos, feixes, grupos, anéis, módulos e outras teorias. O estudo da geometria algébrica moderna, por exemplo, seria praticamente impensável sem a cohomologia de feixes.

Uma noção central na álgebra homológica é a de sequência exata, que podem ser usadas para cálculos. Uma ferramenta clássica da álgebra homológica é o de funtor derivado cujos exemplos mais básicos são Ext e Tor. Assumiremos a partir daqui, prévios conhecimentos sobre a teoria de anéis.

## 1.1 Lembrando alguns conceitos básicos

**Definição 1.1.1** Seja $R$ um anel comutaivo com elemento identidade 1. Dizemos que $M$ é um $R$**-módulo** se $(M,+)$ é um grupo abeliano, dotado de uma multiplicação por escalar

$$R \times M \to M$$

$$(r,m) \longmapsto rm$$

tal que, para quaisquer $r,s \in R$ e $m,n \in M$, as seguintes propriedades sejam verificadas:

1. $(r+s)m = rm+sm$
2. $r(m+n) = rm+rn$
3. $(rs)m = r(sm)$
4. $1m = m$

No que segue estudaremos sempre $R$-módulos sobre anéis comutativos com elemento identidade. Afim de não haver perigo de confusão, usaremos simplesmente a expressão

**$R$-módulo**. Da mesma forma, um anel deve ser entendido como um anel com elemento identidade, salvo menção contrário.

**Exemplo 1.1.2** O grupo trivial $\{0\}$, o anel $R$ e todo ideal $I$ de $R$ são claros exemplos de $R$-módulos.

**Exemplo 1.1.3** Sejam $K$ um corpo, $V$ um K-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dado um polinômio $p(X) \in K[X]$ da forma $p(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, indicaremos por $p(T)$ o operador linear $p(T) = a_0I + a_1T + ... + a_nT^n$, onde $I$ é o operador identidade em $V$ e $T^k = \underbrace{T \circ ... \circ T}_{k}$. Então $V$ é um $K[X]$- módulo em relação a adição usual de $V$ e a multiplicação por escalar dada por $p(X).v := p(T)(v)$.

**Exemplo 1.1.4** Sejam $M_1, ..., M_r$ A-módulos e $M = M_1 \times \ldots \times M_r$ o produto cartesiano usual. Observe que as operações

$$(m_1, \ldots, m_r) + (n_1, \ldots, n_r) = (m_1 + n_1, \ldots, m_r + n_r)$$

$$a(m_1, \ldots, m_r) = (am_1, \ldots, am_r),$$

para todo $m_i, n_i \in M_i$ e para todo $a \in A$, definem em $M$ uma estrutura de A-módulo.

**Exemplo 1.1.5** Seja $M$ um $R$-módulo então:

1. $(\forall\, m \in M)\ 0m = 0$.
2. $(\forall\, r \in R)\ r0 = 0$.
3. $(\forall\, r \in R)(\forall\, m \in M)\ r(-m) = (-r)m = -rm$.

**Exemplo 1.1.6** Todo grupo abeliano $G$ pode ser considerado como um módulo sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. De fato, basta considerar, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $a \in G$, a seguinte multiplicação por escalar:

$$n \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{vezes}}, & \text{se} \quad n > 0 \\ 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-n\text{vezes}} & \text{se} \quad n < 0. \end{cases}$$

**Definição 1.1.7** Um $R$-módulo $F$ é dito um módulo livre se $F = \oplus_i R_i$, onde $R_i \cong R$. Em outras palavras, $F$ é livre se $F$ possui uma base.

Observe que qualquer espaço vetorial $V$ sobre um corpo é livre. De fato, escolha uma base $\{v_i\}_{i \in I}$ de $V$. Então $V \cong \oplus_i v_i k \cong k$.

**Definição 1.1.8** Seja $M$ é um $R$-módulo.

(i) Dizemos que $\{x_i\}_{i \in I}$, com $x_i \in M$, gera $M$ se todo elemento $x \in M$ pode ser escrito na forma

$$x = \sum_i r_i x_i$$

onde $r_i \in R$ e exceto um conjunto finito dos $r_i$ são não nulos. Um $R$-módulo $M$ é dito finitamente gerado se o conjunto de índices $I$ é finito, isto é, existe $x_1, \ldots, x_k \in M$ tal que

$$M = \{r_1x_1 + \cdots + r_kx_k | r_i \in R\} = Rx_1 + \cdots + x_kR = < x_1, \ldots, x_k > .$$

(ii) Dizemos que $M$ é um módulo $R$-finitamente apresentado ou um $R$-módulo com apresentação finita se existirem inteiros $n, m \in \mathbb{N}$ e uma sequência exata

$$R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \to M \to 0.$$

Informalmente, $M$ é um $R$-módulo finitamente apresentado se e somente se for finitamente gerado e o módulo de relações entre esses geradores também for finitamente gerado. A escolha de uma sequência exata, como na definição, é chamada apresentação de $M$.

**Observação 1.1.9** Seja $M$ um $R$-módulo com um conjunto de geradores $\{x_i\}_{i\in I}$. Considere agora $F = \oplus_i R_i$, onde $R_i \cong R$ e os elementos $e_i = (0,0,\dots,1,0,\dots) \in F$, onde 1 esta na $i$-ésima coordenada. Note que existe um homomorfismo natural $F \to M$ tal que $e_i \to x_i$. Assim o mapa

$$(r_1, r_2, \dots,) \to \sum_i r_i x_i \in M.$$

é sobrejetivo e esta bem definido desde que $F$ é livre.

O fato de que todo espaço vetorial (módulo sobre um corpo) admite uma base é um dos objetos mais importantes e frutíferos na teoria de Álgebra linear. Quando pensamos na extensão do conceito de espaço vetorial ( ou seja os $R$-módulos) isto não necessariamente acontece para o caso de módulos definidos sobre anéis arbitrários. Somente para o caso de módulos livres é possível determinar uma base. Para módulos que não sejam livres, é conhecido que ainda conseguimos decompô-los em somas diretas de submódulos cíclicos. Geralmente, temos que considerar um sistema mínimo de geradores em vez de uma base (onde "mínimo" significa que nenhum subconjunto própio gera o módulo). Isto é ilustrado no seguinte exemplo simples.

**Exemplo 1.1.10** Considere $R = \mathbb{C}[x,y,z]$ o anel de polinômios e seja $M = (xy, xz)$ o $R$-módulo. Sabemos que $M$ é finitamente gerado por $m_1 = xy$ e $m_2 = xz$. Desde que nós temos a relação

$$zm_1 - ym_2 = z(xy) - y(xz) = 0.$$

Portanto $\{m_1, m_2\}$ não é uma base. Pode ser mostrado que $M$ não tem base.

## 1.2 Conceitos básicos de álgebra homológica

Para a sequência deste este livro, salvo menção contrária, consideraremos os anéis citados como comutativos e com unidade $1 \neq 0$. Vamos agora introduzir as principais ferramentas que serão utilizadas para a sequência. A primeira delas o conceito de funtor.

### 1.2.1 Funtores

A teoria de funtores é uma importante ferramenta de conexão entre muitas sub-áreas da matematica, tais como álgebra comutativa, geometria algébrica e topologia álgebrica. Por meio dos funtores, informações são passadas entre categorias respeitando algumas "boas" propriedades.

Antes disso, precisamos falar sobre o conjunto de homomorfismos de módulos, que é definido da seguinte forma: seja $R$ um anel comutativo e sejam $M$ e $N$ dois $R$-módulos. Denotamos por $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ como o conjunto de todos os homomorfismos $h : M \to N$ de

$R$-módulos. Sabemos que $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ carrega uma estrutura natural de $R$-módulo com as seguintes operações: sejam $h,\ell \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ e $a \in R$. Então para todo $m \in M$, temos que

$$(h+\ell)(m) := h(m)+\ell(m)$$
$$(ah)(m) := ah(m).$$

**Definição 1.2.1** (**Funtor covariante**) Seja $R'$ um outro anel. Um funtor aditivo (covariante da categoria) de $R$-módulos para (a categoria de) $R'$-módulos é entendido como sendo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(N)),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é levado a um $R'$-módulo $\mathfrak{F}(M)$ e cada $R$-homomorfismo $h : M \to N$ é levado a um $R'$-homomorfismo $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N)$ tal que valem as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{F}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}(M)}$, para cada $R$-módulo $M$;
2. $\mathfrak{F}(\ell \circ h) = \mathfrak{F}(\ell) \circ \mathfrak{F}(h)$, onde $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ e $\ell \in \mathrm{Hom}_R(N,P)$;
3. $\mathfrak{F}(\ell + h) = \mathfrak{F}(\ell) + \mathfrak{F}(h)$, onde $\ell, h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

De forma análoga, podemos introduzir a seguinte definição.

**Definição 1.2.2** (**Funtor contravariante**) Seja $R'$ um outro anel. Um funtor aditivo (contravariante da categoria) de $R$-módulos para (a categoria de) $R'$-módulos é entendido como sendo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M)),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é associado a um $R'$-módulo $\mathfrak{F}(M)$ e para cada $R$-homomorfismo $h : M \to N$ é associado a um $R'$-homomorfismo $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que valem as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{F}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}(M)}$, para cada $R$-módulo $M$;
2. $\mathfrak{F}(\ell \circ h) = \mathfrak{F}(h) \circ \mathfrak{F}(\ell)$, onde $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ e $\ell \in \mathrm{Hom}_R(N,P)$;
3. $\mathfrak{F}(\ell + h) = \mathfrak{F}(\ell) + \mathfrak{F}(h)$, onde $\ell, h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

**Exemplo 1.2.3** (**Funtor identidade**) O funtor

$$\mathrm{Id} = \mathrm{Id}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (M \xrightarrow{\mathrm{Id}(h)} N),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é levado a um $R$-módulo $\mathrm{Id}\,(M) = M$ e cada $R$-homomorfismo $h : M \to N$ é levado a um homomorfismo $h : M \to N$ de $R$-módulos é chamado funtor identidade. Note que este funtor leva a categoria de $R$-módulos e $R$-homomorfismos para ela mesma.

**Exemplo 1.2.4** (**Funtor localização**) Seja $S \subset R$ um conjunto multiplicativamente fechado de $R$ e seja $\eta_S : R \to S^{-1}R$ o homomorfismo canônico definido por $x \mapsto \frac{xs}{s}$ para todo $x \in R$ e qualquer $s \in S$. O funtor

$$S^{-1} = S^{-1}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(h)} S^{-1}N),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é levado a um $S^{-1}R$-módulo $S^{-1}M$ e cada $R$-homomorfismo $h : M \to N$ é levado a um $S^{-1}R$-homomorfismo $S^{-1}h : S^{-1}M \to S^{-1}N$, de $S^{-1}R$-módulos, é chamado funtor localização. Observe que este funtor leva a categoria de $R$-módulos para a categoria de $S^{-1}R$-módulos.

⟨homC⟩ **Exemplo 1.2.5** (**Funtor contravariante** $\mathrm{Hom}_R(-,X)$) Seja $X$ um $R$-módulo fixo. Então, $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é um funtor da categoria de $R$-módulos para a categoria de $R$-módulos, dado por:

$$\mathrm{Hom}_R(-,X) = \mathrm{Hom}_R(\bullet,X) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\mathrm{Hom}_R(N,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M,X)),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é levado a um $R$-módulo $\mathrm{Hom}_R(M,X)$ e cada $R$-homomorfismo $f : M \to N$ é levado a um $R$-homomorfismo $\mathrm{Hom}_R(f,X) : M \to X$, onde $\mathrm{Hom}_R(f,X) := h \circ f$, para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(N,X)$.

⟨hom⟩ **Exemplo 1.2.6** (**Funtor covariante** $\mathrm{Hom}_R(X,-)$) Seja $X$ um $R$-módulo fixo. Então, $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ é um funtor da categoria de $R$-módulos para a categoria de $R$-módulos, dado por:

$$\mathrm{Hom}_R(X,-) = \mathrm{Hom}_R(X,\bullet) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,N)),$$

o qual, cada $R$-módulo $M$ é levado a um $R$-módulo $\mathrm{Hom}_R(X,M)$ e cada $R$-homomorfismo $f : M \to N$ é levado a um $R$-homomorfismo $\mathrm{Hom}_R(X,f) : X \to N$, onde $\mathrm{Hom}_R(X,f) := f \circ h$, para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(X,M)$.

### 1.2.2 Sequências exatas

Agora, vamos definir uma das principais ferramentas para a sequência deste livro.

**Definição 1.2.7** Uma sequência $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ de $R$-módulos e $R$-homomorfismos é dita ser exata em $M$ se $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Por sua vez, a sequência da forma

$$s : \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots,$$

é dita exata se é exata em $M_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência da forma

$$r : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

que é exata em $M_1$, $M$ e $M_2$ é chamada de sequência exata curta.

Observe que se $r : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta, então segue que $f$ é injetora e $g$ é sobrejetora. Por sua vez, note que se $N$ é um submódulo de $M$, então a sequência $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ é uma sequência exata curta, onde $i$ é a aplicação de inclusão (a qual é uma injeção) e $\pi$ é aplicação projeção natural (a qual é uma sobrejeção).

Para um homomorfismo de $R$-módulos $f : M \to N$, existem as seguintes sequências exatas canônicas curtas, as quais usualmente são utilizadas na literatura:

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M \to f(M) \to 0, \text{ e}$$

$$0 \to f(M) \to N \to \mathrm{Coker}(f) := N/\mathrm{Im}(f) \to 0.$$

**Definição 1.2.8** Sejam $R$ e $S$ anéis. Dizemos que o funtor $\mathfrak{F}: \mathrm{M}_R \to \mathrm{M}_S$ é exato à esquerda se

$$0 \to \mathfrak{F}(M_1) \overset{\mathfrak{F}(f)}{\to} \mathfrak{F}(M) \overset{\mathfrak{F}(g)}{\to} \mathfrak{F}(M_2)$$

é uma sequência exata de $S$-módulos, sempre que $0 \to M_1 \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} M_2$ é sequência exata de $R$-módulos.

Da mesma forma, se

$$\mathfrak{F}(M_1) \overset{\mathfrak{F}(f)}{\to} \mathfrak{F}(M) \overset{\mathfrak{F}(g)}{\to} \mathfrak{F}(M_2) \to 0$$

é uma sequência exata de $S$-módulos, para cada $M_1 \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} M_2 \to 0$ sequência exata de $R$-módulos, então $\mathfrak{F}$ é chamado de funtor exato à direita.

Se $\mathfrak{F}$ for um funtor exato à esquerda e à direita, então $\mathfrak{F}$ é chamado de funtor exato.

**Definição 1.2.9** Dizemos que uma sequência exata $M_1 \overset{f}{\to} M \to 0$ *cinde* se existe um $R$-homomorfismo $j: M \to M_1$ tal que $f \circ j = Id_M$.

Analogamente, a sequência exata $0 \to M_1 \overset{f}{\to} M$ *cinde* se existe um $R$-homomorfismo $j: M \to M_1$ tal que $j \circ f = Id_{M_1}$.

Em ambos os casos, $j$ é chamado de **cisão** sobrejetiva e injetiva de $f$ respeitvamente ou simplesmente cisão de $f$.

⟨prop1⟩ **Proposição 1.2.10** Se a sequência exata $0 \to M_1 \overset{f}{\to} M$ cinde, então $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f')$, onde $f'$ é a cisão de $f$.

*Demonstração.* Se $x \in M$, então $f'(x) \in M_1$ e assim $f(f'(x)) \in M$. Se $z = x - f(f'(x))$, então:

$$\begin{aligned} f'(z) &= f'(x) - f'(f(f'(x))) \\ &= f'(x) - f'(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pelo fato que $f' \circ f = \mathrm{Id}_{M_1}$. Assim, $z \in \mathrm{Ker}(f')$ e $x = f(f'(x)) + z \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f')$. Portanto, $M = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f')$. Desta forma, é suficiente provar que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f') = 0$. De fato, Se $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f')$, então $y = f(x)$ para algum $x \in M_1$, e assim $0 = f'(y) = f'(f(x)) = x$. Portanto, segue que $y = f(0) = 0$ e com isso temos o resultado. ■

⟨cindeepi⟩ **Proposição 1.2.11** Se a sequência exata $M \overset{g}{\to} M_2 \to 0$ cinde, então $M = \mathrm{Im}(g') \oplus \mathrm{Ker}(g)$, onde $g'$ é a cisão de $g$.

*Demontração.* A demonstração é similar à prova da Proposição 1.2.10. ■

Um pergunta natural que surge é a seguinte: se $0 \to M_1 \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, e se $f$ cinde, então será que $g$ cinde ? A recíproca também é verdadereira?

Estas perguntas dão origem a seguinte definição.

**Definição 1.2.12** Seja $S: 0 \to M_1 \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} M_2 \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, dizemos que $S$ *cinde à esquerda*, se $f$ cinde. Analogamente, dizemos que $S$ *cinde à direita*, se $g$ cinde.

**Proposição 1.2.13** Uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos cinde à esquerda se, e somente se, cinde à direita.

*Demonstração.* Suponhamos que $S: 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos que cinde à esquerda. Assim, seja $f': M \to M_1$ uma aplicação cisão para $f$, ou seja, $f'$ é tal que $f' \circ f = \mathrm{Id}_{M_1}$. Então, pela Proposição 1.2.10, temos que $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f')$.

Além disso, observe que

$$f'(x - f(f'(x))) = f'(x) - f'(f(f'(x))) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Então $x - f(f'(x)) \in \mathrm{Ker}(f')$, para cada $x \in M$.

Agora, defina $g': M_2 \to M$ por $g'(y) = x - f(f'(x))$, onde $x \in M$ e é tal que $g(x) = y$. Tal $x$ existe pelo fato que $g$ é sobrejetiva.

Demonstremos que $g'$ está bem definida. De fato, suponhamos que $x' \in M$ é tal que $g(x') = y$. Assim $x - x' \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, e então

$$\begin{aligned}(x - f(f'(x))) - (x' - f(f'(x'))) &= (x - x') - (f(f'(x)) - f(f'(x'))) \\ &= (x - x') - f(f'(x - x')) \in \mathrm{Ker}(f') \cap \mathrm{Im}(f).\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.10, temos que $\mathrm{Ker}(f') \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Logo $g'$ está bem definida.

Desta forma,

$$g(g'(y)) = g(x - f(f'(x))) = g(x) = y.$$

Segue que $S$ cinde à direita. A recíproca é similar. ■

**Exemplo 1.2.14** Nem toda sequência exata cinde. Por exemplo, a sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

não cinde. De fato, como $\mathbb{Z}_4 \neq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, então pelo Execício 8 abaixo, a sequência exata não cinde.

### 1.2.3 COLOCAR AQUI PROPRIEDEADES RESPEITO A ESTA SEçÃo

Aqui podemos colocar propriedades gerais respeito a funtores ?????

### 1.2.4 Exercícios

⟨Exercícios 4⟩

1. Seja $M$ um módulo livre de de posto finito $r$ sobre um, domínio de ideal $R$ (DIP). Mostre que todo submódulo de $M$ é um $R$-módulo livre de posto no máximo $r$.
2. Sejam $N, M, P$ três $R$-módulos tal que $N = M \oplus P$. Então a sequência $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ de $R$-módulos, onde $f(m) = m + 0$ e $g(m + p) = p$, é exata e cinde.
3. Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos com $M$ livre e $X = \{x_i\}_{i \in I}$ uma $R$-base de $M$. Dada uma função $f: X \to N$, mostre que existe um único $R$-homomorfismo $f: M \to N$ que estende $f$.
4. Considere $L, M, N$ $R$-módulos, $f: M \to N$ um $R$-epimorfismo e $g: L \to N$ um $R$-homomorfismo. Se $L$ é livre, mostre que existe um $R$-homomorfismo $\overline{g}: L \to M$ tal que $\overline{g} \circ f = g$.

5. Seja $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ uma sequênca exata de $R$-módulos. Mostre que se $P$ é livre então a sequência cinde.
6. Seja $f : M \to L$ um $R$-epimorfismo. Mostre que se $L$ é livre então $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus L$.

⟨imagfree⟩

7. Mostre que todo $R$-módulo é uma imagem homomorfica de um $R$-módulo livre.

⟨Cinde7⟩

8. Mostre que se $S : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então $S$ cinde se, e somente se, uma das três condições equivalentes ocorre:
   (a). $\mathrm{Im}(f)$ é um somando direto de $M$;
   (b). $\mathrm{Im}(g)$ é um somando direto de $M$;
   (c). $M = M_1 \oplus M_2$.
9. (**Lema dos cinco curto**) Seja

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

   um diagrama comutativo com linhas exatas de $R$-módulos e $R$-homomorfismos. Prove que cada uma das seguintes afirmações ocorre.
   (a) Se $\alpha$ e $\gamma$ são injetvos, então $\beta$ é injetivo;
   (b) Se $\alpha$ e $\gamma$ são sobrejetivos, então $\beta$ é sobrejetivo;
   (c) $M = M_1 \oplus M_2$.
10. (**Lema dos cinco longo**) Seja

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \varepsilon\downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

   um diagrama comutativo com linhas exatas de $R$-módulos e $R$-homomorfismos. Prove que cada uma das seguintes afirmações ocorre:
   (a). Se $\alpha$ é sobrejetivo, $\beta$ e $\delta$ são injetivos, entaõ $\gamma$ é injetivo;
   (b). Se $\varepsilon$ é injetivo, $\beta$ e $\delta$ são sobrejetivos, então é $\gamma$ é sobrejetivo;
   (c). Se $\alpha, \beta, \delta$ e $\varepsilon$ são isomorfismos, entao $\gamma$ é um isomorfismo.

## 1.3 Os funtores $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ e $\bigotimes$

Vamos agora investigar dois importantes bifuntores os quais são aditivos em cada variável. Estes funtores exercem um papel importante na álgebra homológica, geometria algébrica e álgebra comutativa. No restante do texto, vamos adotar a seguintes notação,

$$\mathbf{M}_R = \{\text{conjunto de } R-\text{módulos}\},$$

e além disso, Hom e $\bigotimes$ são definidos por:

$$\mathrm{Hom}_R(-,-) : \mathbf{M}_R \times \mathbf{M}_R \to \mathbf{M}_R$$

e

$$-\bigotimes_R - : \mathbf{M}_R \times \mathbf{M}_R \to \mathbf{M}_R$$

respectivamente.

### 1.3.1 Propriedades do funtor Hom

Vimos nos exemplos 1.2.5 e 1.2.6 que para qualquer $R$-módulo fixo $X$, $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ define um funtor covariante e $\mathrm{Hom}(-,X)$ um funtor contravariante.

Seja $f : M \to N$ uma aplicação $R$-linear, então o funtor covariante

$$\mathrm{Hom}_R(X,-) : \mathrm{M}_R \to \mathrm{M}_R$$

é tal que

$$\mathrm{Hom}_R(X,f) = f_* : \mathrm{Hom}_R(X,M) \to \mathrm{Hom}_R(X,N),$$

onde $f_*(h) = f \circ h$.

Para o funtor contravariante

$$\mathrm{Hom}_R(-,X) : \mathrm{M}_R \to \mathrm{M}_R$$

é tal que

$$\mathrm{Hom}_R(f,X) = f^* : \mathrm{Hom}_R(N,X) \to \mathrm{Hom}_R(M,X),$$

onde $f^*(h) = h \circ f$.

Assim, se $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ é uma sequência exata de $R$-modulos e $R$-homomorfismos, então, para qualquer $R$-módulo $X$, temos

$$\mathrm{Hom}_R(X,M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,M_2) \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Hom}_R(M_2,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,X)$$

que são sequências de $R$-módulos e $R$-homomorfismos.

Desta forma surge a seguinte pergunta natural: estes funtores preservam sequencias exatas curtas de $R$-módulos? Os próximos resultados nos darão respostas sobre esta pergunta.

⟨exachom⟩ **Proposição 1.3.1** Para qualquer $R$-módulo $X$, $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ and $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ são funtores exatos à esquerda em $\mathrm{M}_R$.

*Demonstração.* Seja $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ uma sequência exata de $R$-módulos, mostraremos que

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X,M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,M_2)$$

é exata.

É facil ver que $f_*$ and $g_*$, são homomorfismos, então primeiro demonstremos que $f_*$ é injetivo. Se $h \in \mathrm{Hom}_R(X,M_1)$ tal que $f_*(h) = 0$, então $f \circ h = 0$. Segue que $f(h(x)) = 0$ para todo $x \in X$, isto implica que $h(x) = 0$ para cada $x \in X$, desde que $f$ é injetivo. Agora, seja $h \in \mathrm{Im}(f_*)$. Então existe $h' \in \mathrm{Hom}_R(X,M_1)$ tal que $h = f_*(h')$. Isto nos fornece que $g_*(h) = g_*(f_*(h')) = g(f(h')) = 0$, desde que $g \circ f = 0$. Portanto, $h \in \mathrm{Ker}(g_*)$ e assim $\mathrm{Im}(f_*) \subseteq \mathrm{Ker}(g_*)$.

Finalmente, se $h \in \mathrm{Ker}(g_*)$, entao $g(h) = g_*(h) = 0$. Segue, se $x \in X$, então $g(h(x)) = 0$ e assim $h(x) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Como $f$ é injetora, existe um único elemento $y \in M_1$ tal que

$f(y) = h(x)$. Desta forma $h'' \in \mathrm{Hom}_R(X, M_1)$ e $f(h''(x)) = f(y) = h(x)$. Assim, $f_*(h'') = h \in \mathrm{Im}(f_*)$ e temos $\mathrm{Ker}(g_*) \subseteq \mathrm{Im}(f_*)$. Portanto $\mathrm{Im}(f_*) = \mathrm{Ker}(g_*)$ e disto podemos concluir que o funtor $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ é exato a esquerda. A prova do outro funtor é semelhante. ■

Em geral, o bi funtor $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ em geral não é exato. A seguir daremos um exemplo que comprova este fato.

**Exemplo 1.3.2** Considere a seguinte sequência exata: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_6 \to 0$ onde $f(x) = 6x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ e $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$. Mostraremos que o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_6)$ não é exato a direita.

Pela Proposição 1.3.1, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6).$$

Se $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6)$ e $x \in \mathbb{Z}$, então $f^*(g(x)) = (g \circ f)(x) = g(6x) = 6g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Assim $f^*(g) = 0$ e então $f^* = 0$. Mas, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \neq 0$. Portanto, $f^*$ não pode ser sobrejetiva. Consequentemente, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_6)$ não é exata à direita.

Da mesma forma prova-se que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, -)$ não é exato à direita.

⟨homcinde⟩ **Proposição 1.3.3** Se $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homorfirmos que cinde, então para qualquer $R$-módulo $X$,

(a) $0 \to \mathrm{Hom}_R(M_2, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, X) \to 0$,

(b) $0 \to \mathrm{Hom}_R(X, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X, M_2) \to 0$,

são sequências exatas de $R$-módulos e $R$-homomorfismos que cindem.

*Demonstração.* Demonstraremos $(a)$ e $(b)$ deixamos como exrecício. Pela Proposição 1.3.1

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_2, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, X)$$

é exata, e assim só precisamos mostrar que $f^*$ é sobrejetora e que um dos $f^*$ and $g^*$ tem uma aplicação cisão. Desde que $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta que cinde, existe uma aplicação $R$-linear $f' : M \to M_1$ tal que $f' \circ f = id_{M_1}$. Se $h \in \mathrm{Hom}_R(M_1, X)$, então $h \circ f' \in \mathrm{Hom}_R(M, X)$ e $f^*(h(f')) = h(f'(f)) = h$, e com isto $f^*$ é sobrejetora.

Finalmente, se $f' : M \to M_1$ é uma aplicação cisão para $f$, então $f'^* : \mathrm{Hom}_R(M_1, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, X)$. Logo, se $h \in \mathrm{Hom}_R(M_1, X)$, então $f^*(f'^*(h)) = f^*(h \circ f') = h \circ f' \circ f = h$. Consequentemente, $f^* \circ f'^* = id_{\mathrm{Hom}_R(M_1, X)}$. Isto demonstra que $f'^*$ é a aplicação cisão para $f^*$. Portanto,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_2, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, X) \to 0$$

é uma sequência exata curta cisão de $R$-módulos.

■

### 1.3.2 Funtor produto tensorial

A seguir veremos facilmente que para qualquer $R$-módulo fixo $X$, o funtor produto tensorial $- \bigotimes_R X$ é um funtor covariante. Lembremos que este funtor é definido por $(- \bigotimes_R X)(M) = M \bigotimes_R X$.

Seja $f : M \to N$ uma aplicação $R$-linear (é um $R$-homomorfismo); desta forma, o funtor

$$- \otimes_R X : \mathbf{M}_R \to \mathbf{M}_R$$

é tal que

$$(- \otimes_R X)(f) = f \otimes \mathrm{id}_X : M \otimes_R X \to N \otimes_R X,$$

Similarmente definamos o funtor $X \otimes_R -$.

Assim, se $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ é uma sequência exata de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então para qualquer $R$-módulo $X$ temos que

$$M_1 \otimes_R X \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_X} M_2 \otimes_R X$$

e

$$X \otimes_R M_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes f} X \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes g} X \otimes_R M_2$$

são sequências de $R$-módulos e $R$-homomorfismos. Observe que, se $R$ é um anel comutativo, as duas sequências acima descritas são iguais, ou seja, neste caso temos que o produto tensorial é comutativo.

Será que este funtores preservam sequências exatas curtas de $R$-módulos?

### 1.3.3 Propriedades de $- \otimes_R X$

⟨1.3.3⟩ Com o intuito de responder a pergunta anteiror, começamos aqui com o seguinte resultado.

?⟨exactor⟩? **Proposição 1.3.4** Se $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata de $R$-módulos, então para qualquer $R$-módulo $X$ a sequência de $R$-módulos

$$M_1 \otimes_R X \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_X} M_2 \otimes_R X \to 0$$

é uma sequência exata.

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição é suficiente mostrar que $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X)$ e que $g \otimes \mathrm{id}_X$ é um $R$-homomorfismo sobrejetivo. Como $g$ e $\mathrm{id}_X$ são sobrejetoras, facilmente provamos que $g \otimes \mathrm{id}_X$ é tambem sobrejetora. Observe que $g \circ f \equiv 0$ nos fornece $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X)$, e deste modo existe uma aplicação induzida

$$h : (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) \to M_2 \otimes_R X,$$

tal que

$$h(y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)) = g(y) \otimes x.$$

Consequentemente, temos o seguinte diagrama comutativo, onde a primeira linha é exata à direita.

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 \otimes_R X & \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_X} & M \otimes_R X & \longrightarrow & (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes \mathrm{id}_X} & \swarrow{\scriptstyle h} & & & \\ & & M_2 \otimes_R X & & & & \end{array}$$

Agora definamos a aplicação $R$-bilinear $\rho : M_2 \times_R X \to (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$ como $\rho(z,x) = y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$, onde $y \in M$, tal que $g(y) = z$. Mostremos que esta aplicação está bem definida. Se $y' \in M$ é outro elemento tal que $g(y') = z$, então $y - y' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Seja $u \in M_1$ tal que $f(u) = y - y'$. Então $(f \otimes \mathrm{id}_X)(u \otimes x) = f(u) \otimes x = (y - y') \otimes x$, e assim $(y - y') \otimes x \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$. Portanto, $y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) = y' \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$, o qual demonstra que $\rho$ está bem definida. Pela definição de $\rho$, existe um homomorfismo

$$\overline{h} : M_2 \otimes_R X \to (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$$

de $R$-módulos tal que

$$\overline{h}(z \otimes x) = y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$$

onde tomamos $y \in M$ tal forma que $g(z) = y$, e com isto facilmente demonstramos que $\overline{h} = h^{-1}$. Assim, $h$ é um isomorfismo. Agora pelo teorema do isomorfismo $(M \otimes_R X)/\mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X) \cong M_2 \otimes_R X$. Consequentemente, $(M \otimes_R X)/\mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X) \cong (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$ e portanto, $\mathrm{Ker}(f \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$, como queríamos demonstrar. ■

**Exemplo 1.3.5** (**O funtor** Tor **não é exato à esquerda**). A sequência $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ é uma sequência exata curta, onde $i$ é a injeção canônica e $\eta$ é a aplicação natural (projeção canônica). Além disso, a sequência

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_6}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}_X} \mathbb{Q}/(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6) \to 0$$

é exata. Mas, $i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_6}$ não é uma aplicação injetiva. Certamente, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 = 0$ pois, para qualquer $\frac{p}{q} \otimes [n] \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6$, temos que

$$\frac{p}{q} \otimes [n] = \frac{p}{6q} \otimes 6[n] = \frac{p}{6q} \otimes 0 = 0.$$

Mas, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \neq 0$, e assim $i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_6}$ não pode ser injetiva. Consequentemente, o funtor Tor não é exato à esquerda.

### 1.3.4 COLOCAR AQUI PROPRIEDEADES RESPEITO A ESTA SEçÃo

A seguir apresentaremos um resultado muito conhecido dentro da teoria de funtores.

**Teorema 1.3.6** (**Fórmula de Adjunção**). Sejam $R$ e $S$ anéis comutativos com unidade, $A$ um $R$-módulo, $B$ um $(R,S)$-bimódulo e $C$ um $S$-módulo. Então existe um isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)).$$

*Proof.* Defina

$$\begin{aligned} \tau_{A,B,C} : \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) &\to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\ f &\mapsto \tau_{A,B,C}(f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{A,B,C}(f) : A &\to \mathrm{Hom}_S(B,C) \\ a &\mapsto \tau_{A,B,C}(f)_a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{A,B,C}(f)_a : B &\to C\\ b &\mapsto f(a\otimes_R b).\end{aligned}$$

Primeiramente, mostraremos que $\tau_{A,B,C}$ é um homomorfismo de grupos. Para isso, sejam $f,g \in \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B,C)$, $a\in A$ e $b\in B$. Assim

$$\begin{aligned}\tau_{A,B,C}(f+g)_a(b) &= (f+g)(a\otimes_R b)\\ &= f(a\otimes_R b)+g(a\otimes_R b)\\ &= \tau_{A,B,C}(f)_a(b)+\tau_{A,B,C}(g)_a(b).\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $\tau_{A,B,C}$ é injetiva. Considere $f\in \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B,C)$ tal que $\tau_{A,B,C}(f)=0$. Então

$$\tau_{A,B,C}(f)_a = 0, \forall a\in A,$$

logo

$$\tau_{A,B,C}(f)_a(b) = 0, \forall b\in B,$$

ou seja,

$$f(a\otimes_R b)=0, \forall a\in A, \forall b\in B$$

e portanto concluímos que $f=0$.

Na sequência, vamos mostrar que $\tau_{A,B,C}$ é sobrejetiva. Para tanto, considere $F\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$ e defina $\overline{f}: A\times B\to C$ por $\overline{f}(a,b)=F_a(b)$. Note que $\overline{f}$ é biaditiva, isto é, se $a_1,a_2\in A$ e $b_1,b_2\in B$, então

$$\begin{aligned}\overline{f}(a_1+a_2,b_1+b_2) &= F_{a_1+a_2}(b_1+b_2)\\ &= F_{a_1+a_2}(b_1)+F_{a_1+a_2}(b_2)\\ &= F_{a_1}(b_1)+F_{a_2}(b_1)+F_{a_1}(b_2)+F_{a_2}(b_2).\end{aligned}$$

Assim, pela propriedade universal do produto tensorial, temos que existe um $R$-homomorfismo $f: A\otimes_R B\to C$ tal que $f(a\otimes_R b)=\overline{f}(a,b)=F_a(b)$, portanto $F=\tau_{A,B,C}(f)$.

Por fim, note que os isomorfismos $\tau$ cumprem o axioma de naturalidade, isto é, que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B,C) & \xrightarrow{\tau_{A,B,C}} & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))\\ {\scriptstyle (f\otimes_R Id_B)^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^\star}\\ \mathrm{Hom}_S(A'\otimes_R B,C) & \xrightarrow{\tau_{A',B,C}} & \mathrm{Hom}_R(A',\mathrm{Hom}_S(B,C))\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B,C) & \xrightarrow{\tau_{A,B,C}} & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))\\ {\scriptstyle (Id_A\otimes_R g)^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g^\star}\\ \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B',C) & \xrightarrow{\tau_{A,B',C}} & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B',C))\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C) & \xrightarrow{\tau_{A,B,C}} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\ \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_\star} \\ \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C') & \xrightarrow{\tau_{A',B,C}} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C')) \end{array}$$

■

⟨lema18⟩ **Lema 1.3.7** Sejam $R$ um anel comutativo com unidade, $I$ um ideal de $R$ e $M$ um $R$-módulo. Então

$$(R/I)\otimes_R M \cong M/IM.$$

*Proof.* Sejam $j : I \to R$ e $p : R \to R/I$ a inclusão e a projeção canônica, respectivamente. Então temos a seguinte sequência exata de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} R \xrightarrow{p} R/I \longrightarrow 0.$$

Pela exatidão à direita do funtor $-\otimes_R M$ e pela injetividade de $j$, temos que a sequência de $R$-módulos abaixo é exata

$$0 \longrightarrow I\otimes_R M \xrightarrow{j\otimes_R Id_M} R\otimes_R M \xrightarrow{p\otimes_R Id_M} R/I\otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Dos isomorfismos $I\otimes_R M \cong IM$ e $R\otimes_R M \cong M$, temos que existem mapas $h$ e $k$ tais que a sequência de $R$-módulos abaixo é exata

$$0 \longrightarrow IM \xrightarrow{h} M \xrightarrow{k} R/I\otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Portanto, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$M/IM \cong R/I\otimes_R M.$$

■

⟨lemma17⟩ **Lema 1.3.8** Sejam $R$ um anel comutativo com unidade, $I$ e $J$ ideais de $R$. Então:

$$(R/I)\otimes_R (R/J) \cong R/(I+J).$$

*Proof.* Esse resultado é uma consequência imediata do lema anterior, pois

$$\begin{aligned} (R/I)\otimes_R (R/J) &\cong (R/J)/(I(R/J)) \\ &= (R/J)/((IR+J)/J) \\ &\cong R/(IR+J) \\ &= R/(I+J). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 1.3.9** Sejam $m,n \in \mathbb{N}$. Se $d = \mathrm{mdc}(m,n)$, então:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Vamos agora mostrar este isomorfismo. Considere o mapa $L : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dada para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, tal que $f(1+m\mathbb{Z}) = k+n\mathbb{Z}$, por

$$L(f) = k + d\mathbb{Z}.$$

Para mostrar que $L$ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tais que $f(1+m\mathbb{Z}) = k+n\mathbb{Z}$ e $g(1+m\mathbb{Z}) = l+n\mathbb{Z}$. Então

$$\begin{aligned} L(af+bg) &= (af+bg)(1+m\mathbb{Z}) \\ &= af(1+m\mathbb{Z}) + bg(1+m\mathbb{Z}) \\ &= a(k+n\mathbb{Z}) + b(l+n\mathbb{Z}) \\ &= aL(f) + bL(g). \end{aligned}$$

Agora note que sendo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ cíclico, temos que qualquer $\mathbb{Z}$-homomorfismo de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é unicamente determinado pela imagem de $1+m\mathbb{Z}$. Desta maneira, se $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ são tais que $f \neq g$, então $L(f) = f(1+m\mathbb{Z}) \neq g(1+m\mathbb{Z}) = L(g)$ e portanto $L$ é injetor.

Por fim, dado $k+d\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ podemos definir

$$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

dada por $f(1+m\mathbb{Z}) = k+n\mathbb{Z}$ extendida por linearidade nos demais elementos de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Perceba que $f$ está bem definida, pois se $i+m\mathbb{Z} = j+m\mathbb{Z}$, então $i-j = mz$ para algum $z \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\begin{aligned} f(i+m\mathbb{Z}) - f(j+m\mathbb{Z}) &= f((i-j)+m\mathbb{Z}) \\ &= f(mz+m\mathbb{Z}) \\ &= f(0+m\mathbb{Z}) \\ &= 0f(1+m\mathbb{Z}) \\ &= 0+n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, $L$ é sobrejetor e segue o isomorfismo.

**Exemplo 1.3.10** Sejam $m,n \in \mathbb{N}$. Se $d = \mathrm{mdc}(m,n)$, então:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

O resultado segue imediatamente do isomorfismo $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, Lema 1.3.8 e Lema 1.3.7, pois

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Note que se $m$ e $n$ são primos entre si, isto é $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$, então

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0.$$

⟨Madapusi10.5.1⟩ **Proposição 1.3.11** Seja $\phi : (A \to A, \mathfrak{m}, k) \to (B, \mathfrak{n}, l)$ uma algebra local plana entre aneis Noetherianos, e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então

$$\dim_k \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A M) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(k, M) \cdot \dim_l \mathrm{Hom}_B(l, B/\mathfrak{m}B).$$

*Demonstração.* Antes de demonstrar a proposição, mostraremos alguns isomorfismos elementares. Os $A$-módulos $k$ e $M$ são finitamente gerados, então $\mathrm{Hom}_A(k, M)$ é finitamente gerado como $A$-módulo. Além disso, a definição $k = A/\mathfrak{m}$ implica que $\mathfrak{m}k$. Observe que $\mathrm{Hom}_A(k, M)$ tem a estrutura de um módulo $k$-módumo, pois $\mathfrak{m}\mathrm{Hom}_A(k, M) = 0$, que é finitamente gerado. Assim, temos

$$\mathrm{Hom}_A(k, M) \cong k^s \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}_0.$$

De maneira semelhante, como $B/\mathfrak{m}B$ e $B \otimes_A M$ são finitamente gerados $B$-módulos, temos

$$\mathrm{Hom}_B(l, B/\mathfrak{m}B) \cong l^r \text{ e } \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A M) \cong l^t \quad \text{para algum } r, t \in \mathbb{N}_0.$$

Usando propriedades de producto tensorial e pelo fato que $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$, temos os seguintes isomorfismos

$$(B/\mathfrak{m}B) \otimes_B l = (B/\mathfrak{m}B) \otimes_B (B/\mathfrak{n}) \cong \frac{B/\mathfrak{m}B}{\mathfrak{n}B/\mathfrak{m}B} = \frac{B/\mathfrak{m}B}{\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B} \cong B/\mathfrak{n} = l$$

e

$$B/\mathfrak{m}B \cong B \otimes_A A/\mathfrak{m} = B \otimes_R k.$$

Com estes isomorfismos, temos os seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned}
l^t &\cong \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A M) \cong \mathrm{Hom}_B((B/\mathfrak{m}B) \otimes_B l, B \otimes_A M) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, \mathrm{Hom}(B/\mathfrak{m}B, B \otimes_A M)) \text{ pela fórmula de adjunção} \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, \mathrm{Hom}(B \otimes_A k, B \otimes_A M)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A \mathrm{Hom}(k, M)) \text{ ver Exercício ??} \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A k\hat{}s) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, B \otimes_A k)\hat{}s \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(l, B/\mathfrak{m}B)\hat{}s \cong (l^r)^s = l^{rs}.
\end{aligned}$$

Com isto finalizamos a demonstração. ■

### 1.3.5 Exercícios

⟨splitEx⟩

1. Sejam $f : N \to M$ e $g : M \to P$ homomorfismos de $R$-módulos. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ é exata e existe um homomorfismo de $R$-módulos $r : M \to N$ tal que $r \circ f = \mathrm{Id}_N$;
   (b) $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$ é exata e existe um homomorfismo de $R$-módulos $s : P \to M$ tal que $g \circ s = \mathrm{Id}_N$;
   (c) $g \circ f = 0$ e existem $R$-homomorfismos $r : M \to N$ e $s : P \to M$ tal que $r \circ f = \mathrm{Id}_N$, $g \circ s = \mathrm{Id}_N$ e $s \circ g + f \circ r = \mathrm{Id}_M$;

(d) existe um diagrama comutativo com a primeira linha exata

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \cong & & \| & & \\ & & N & \xrightarrow{i} & N \oplus P & \xrightarrow{\pi} & P & & \end{array}$$

no qual $i$ e $\pi$ são homomorfismos canônicos definidos por $x \to (x,0)$ e $(x,y) \to y$ respeitivamente.

⟨funtorcinde⟩ 2. Seja $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ um funtor aditivo. Mostre as seguintes afirmações:
   (a) Se $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ é uma sequência exata que cinde, então $0 \to \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{F}(P) \to 0$ é uma sequência exata que cinde.
   (b) Se $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ é uma sequência exata que cinde, então $0 \to \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{F}(P) \to 0$ é uma sequência exata.

   Dica: para mostrar o item $(a)$ é suficiente usar o item $(c)$ do Exercício 1.
3. Sejam $M$ uma $A$-módulo e $N_i$ uma família de $A$-módulos. Prove que $\mathrm{Hom}_A(M, \prod_i N_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_A(M, N_i)$ e $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus N_i, M) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_A(N_i, M)$.

?⟨exercicio2⟩? 4. Seja $R$ e $S$ anéis e $X$ um $(R,S)$-bimódulo. Prove que existe um natural isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_S(X \otimes_R M, N)$ e $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(X,N))$.
5. Seja $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos que cinde. Então para qualquer $R$-módulo $N$, mostre que

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{f^\star} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{g^\star} \mathrm{Hom}_R(N, M_2) \to 0$$

é uma sequência exata curta de $R$-módulos que cinde.

Mandapusi3.1.11⟩? 6. Seja $B$ uma $A$-álgebra plana e seja $M$ um $A$-módulo de apresentação finita. Seja $N$ uma $A$-módulo qualquer. Então

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, N \otimes_A B) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N) \otimes_A B$$

como $B$-módulos.
7. Mostre os seguintes isomorfismos de anéis:
   $(a)$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m,n)$.
   $(b)$ $\mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y] \cong \mathbb{C}[x,y]$.
8. Seja $R$ um anel commutativo. Fixemos inteiros $m$, $n$, $p \geq 1$, e $R$-homomorphisms de módulos livres $f : R^m \to R^n$ e $g : R^n \to R^p$. Prove que a matriz de representação d $[g \circ f]$ da composição $g \circ f$ é o produto $[g][f]$ das matrizes de respresentção de $g$ e $f$.

## 1.4 Álgebra homológica

gebrahomologica⟩ Nesta seção, definiremos as principais ferramentas da álgebra homológica, como por exemplo complexos e co-complexos de módulos, com o intuito de definir cohomologia e homologia de complexos. Provaremos, como principal resultado deste capítulo, o Teorema da Sequência Exata Longa de Homologias e Cohomologias.

### 1.4.1 Complexos e co-complexos de módulos

Uma sequência $\mathbf{M}_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos, da forma

$$\mathbf{M}_\bullet : \cdots \to M_{n+1} \overset{\alpha_{n+1}}{\to} M_n \overset{\alpha_n}{\to} M_{n-1} \to \cdots$$

é dita ser um complexo de cadeia (ou simplesmente complexo) se $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} \equiv 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Cada aplicação $\alpha_n$ é dita ser um operador diferencial. Um complexo $\mathbf{M}_\bullet$ é dito ser exato em $M_n$ se $\mathrm{Im}(\alpha_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_n)$. Dizemos que $\mathbf{M}_\bullet$ é um complexo de cadeias exato, se é exato em $M_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Um complexo da forma

$$\mathbf{M}_\bullet : \cdots \to M_{n+1} \overset{\alpha_{n+1}}{\to} M_n \overset{\alpha_n}{\to} M_{n-1} \to \cdots \to M_1 \to M_0 \to 0$$

onde os zeros adicionais à direita foram omitidos, é chamado de **complexo positivo**.

Da mesma forma, uma sequência $\mathbf{M}^\bullet = \{M^n, \alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos, dada por

$$\mathbf{M}^\bullet : \cdots \to M^{n-1} \overset{\alpha^{n-1}}{\to} M^n \overset{\alpha^n}{\to} M^{n+1} \to \cdots,$$

é dita ser um co-complexo de cocadeia (ou simplesmente co-complexo) se $\alpha^n \circ \alpha^{n-1} \equiv 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Um co-complexo $\mathbf{M}^\bullet$ é dito ser exato em $M^n$ se $\mathrm{Im}(\alpha^{n-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha^n)$. Dizemos que $\mathbf{M}^\bullet$ é um co-complexo exato, se é exato em $M^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Um co-complexo de cocadeias da forma

$$\mathbf{M}^\bullet : 0 \to M^0 \overset{\alpha^0}{\to} M^1 \overset{\alpha^1}{\to} \cdots M^n \to M^{n+1} \to \cdots,$$

onde os zeros adicionais à esquerda foram omitidos, é chamado de **co-complexo positivo**.

Note que um complexo finito nada mais é que um complexo infinito onde é adicionado módulos e homomorfismos triviais. Em particular, se $M$ é um $R$-módulo, podemos visualizá-lo como o complexo de cadeias onde $M_0 = M$ e $M_n = 0$ sempre que $n \neq 0$. Geralmente é útil considerar o complexo trivial $0 = (\{0\}, 0)$.

Observe que acima usamos a notação $-_\bullet$ para complexos e $-^\bullet$ para co-complexos. No entanto, se aplicamos funtores a estes complexos ou co-complexos, os índices dos complexos ou complexos podem nem sempre ser estritamente respeitados. Por exemplo, se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo contravariante e se $\mathbf{M}_\bullet$ é um complexo, então

$$\mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) : \cdots \to \mathfrak{F}(M_{n-2}) \overset{\mathfrak{F}(\alpha_{n-1})}{\to} \mathfrak{F}(M_{n-1}) \overset{\mathfrak{F}(\alpha_n)}{\to} \mathfrak{F}(M_n) \to \cdots$$

é um co-complexo.

Finalmente, se $\mathbf{M}_\bullet$ é um complexo, então $\mathbf{M}_\bullet$ pode ser convertido em um co-complexo $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, \beta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, considerando uma conversão nos índices, isto é, ajustando $N^n = M_{-n}$ e $\beta^n = \alpha_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, um co-complexo pode ser convertido em um complexo. Assim, vemos que a única diferença entre um complexo e um co-complexo está na notação usada. Por esta razão, um resultado obtido para um complexo pode ser obtido para um co-complexo simplesmente levantando os índices inversamente.

**Definição 1.4.1** Se $\mathbf{M}_\bullet$ é um complexo de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então

$$\mathrm{H}_n(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_n)}{\mathrm{Im}(\alpha_{n+1})}$$

é chamado o $n$-ésimo módulo de **homologia** de $\mathbf{M}_\bullet$. Agora, se $\mathbf{M}^\bullet$ é um cocomplexo de $R$-módulos, então $\mathrm{H}^n(\mathbf{M}^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha^n)}{\mathrm{Im}(\alpha^{n-1})}$ é chamado o $n$-ésimo módulo de **cohomologia** de $\mathbf{M}^\bullet$.

Observe na definição acima, se os complexos e co-complexos forem formados por grupos abelianos, as homologias e cohomologias são chamados de grupos de homologia.

**Exemplo 1.4.2** Consideremos a seguinte sequência de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\mathbf{M}_\bullet:\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Para mostrar que este é um complexo, precisamos apenas mostrar que os produtos dos pares de matrizes adjacentes são zero;

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = (0)$$

Calculando os módulos de homologia em cada grau, obtemos

$$H_0(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathbb{Z} \to 0)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}\right)} = \frac{\mathbb{Z}}{<3,2>\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0,$$

$$H_1(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2\right)} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\mathbb{Z}}{\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}\mathbb{Z}} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\mathbb{Z}}{3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3,$$

$$H_2(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2\right)}{\mathrm{Im}(0 \to \mathbb{Z})} = \frac{0\mathbb{Z}}{0Z} = 0.$$

Note que as demais homologias $H_i(\mathbf{M}_\bullet)$ são nulas, pelo fato que os $M_i = 0$ para todo $i \neq 0,1,2$.

Podemos pensar que as definições de complexos e co-complexos pode ser, a grosso modo, uma generalização do conceito de módulos. Com isto se faz importante, na álgebra homológica, o estudo destes novos objetos, como por exemplo, a relação entre complexos por meio de aplicações, chamadas aplicações de cadeias, ou de forma análoga, a relação entre co-complexos por meio de aplicações, a qual são denominada aplicação de cocadeias. Veremos mais detalhamente estes assuntos na próxima seção.

### 1.4.2 Sequência exata longa de homologias e cohomologias

A seguir, faremos uma generalização de sequências exatas de $R$-módulos para sequências exatas de complexos de $R$-módulos. Isto é, nós podemos construir uma sequência exata do tipo: $L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet$.

Sejam $M_\bullet$ e $N_\bullet$ dois complexos. Então, uma **aplicação de complexos de cadeias de grau** $k$ ou simplesmente aplicação de complexos de grau $k$, $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é uma família de $R$-homomorfismos $f_\bullet = \{f_i : M_i \to N_{i+k}\}$, tal que $f_{i-1} \circ \alpha_i = \beta_{i+k} \circ f_i$ ou seguinte diagrama comuta para todo $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & M_i & \xrightarrow{\alpha_i} & M_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_i} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\beta_{i+k+1}} & N_{i+k} & \xrightarrow{\beta_{i+k}} & N_{i+k-1} & \xrightarrow{\beta_{i+k-1}} & \cdots \end{array}$$

A definição de **aplicação de co-complexos de grau** $k$, também chamada de aplicação de co complexos de cadeias, é similar. No caso, é suficiente escolher co-complexos.

Observe que, $M_\bullet$ é um complexo (ou co-complexo $M^\bullet$) exato em $M_i$ (respectivamente, $M^i$) para todo $i \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $\mathrm{H}_i(M_\bullet) = 0$ (ou $\mathrm{H}^i(M^\bullet) = 0$).

⟨mapa⟩ **Proposição 1.4.3** Se $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é uma aplicação de complexos de cadeias, então para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe um $R$-homomorfismo $\mathrm{H}_i(f_\bullet) : \mathrm{H}_i(M_\bullet) \to \mathrm{H}_i(N_\bullet)$ definida por

$$\mathrm{H}_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) = f_i(x) + \mathrm{Im}(\beta_{i+1}),$$

para todo $x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \in \mathrm{H}_i(M_\bullet)$.

*Demonstração.* Para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & M_i & \xrightarrow{\alpha_i} & M_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_i} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\beta_{i+1}} & N_i & \xrightarrow{\beta_i} & N_{i-1} & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & \cdots \end{array}$$

Se $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, então

$$\beta_i(f_i(x)) = f_{i-1}(\alpha_i(x)) = 0$$

então, $f_i(x) \in \mathrm{Ker}(\beta_i)$. Com isto, podemos ver que $\mathrm{H}_i(f_\bullet)$ aplica $\mathrm{Ker}(\alpha_i)/\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$ em $\mathrm{Ker}(\beta_i)/\mathrm{Im}(\beta_{i+1})$.

Agora, demonstraremos que a aplicação $\mathrm{H}_i(f_\bullet)$ está bem definida. Sejam $x, x' \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ e suponha que $x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) = x' + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$. Então $x - x' \in \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$, logo existe $y \in M_{i+1}$ tal que $\alpha_{i+1}(y) = x - x'$.

Assim,

$$f_i(x) - f_i(x') = f_i(x - x') = f_i(\alpha_{i+1}(y)) = \beta_{i+1}(f_{i+1}(y)),$$

e portanto, $f_i(x) - f_i(x') \in \mathrm{Im}(\beta_{i+1})$. Isto mostra que $\mathrm{H}_i(f_\bullet)$ está bem definida. Somente resta provar que $\mathrm{H}_i(f_\bullet)$ é $R$-homomorfismo, mas isto segue facilmente pelo fato de que $f_i$ é $R$-homomorfismo. ■

De maneira similar, pode-se definir aplicação entre cohomologias.

**Definição 1.4.4** Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são duas aplicações de complexos, então $\phi_\bullet$ é uma *homotopia* de $f_\bullet$ para $g_\bullet$, denotado por $\phi_\bullet : f_\bullet \to g_\bullet$, se é uma família de $R$-homomorfismos $\phi_\bullet = \{\phi_i : M_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de grau $+1$ tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1}\circ\phi_i + \phi_{i-1}\circ\alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Se existe uma tal homotopia $\phi_\bullet : f_\bullet \to g_\bullet$, então nos dizemos $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotopicas. Denotamos $f_\bullet \approx g_\bullet$.

Dizemos que dois complexos $M_\bullet$ e $N_\bullet$ tem o *mesmo tipo de homotopia* se existe aplicações de complexos $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ e $g_\bullet : N_\bullet \to M_\bullet$ tal que $f_\bullet \circ g_\bullet \approx id_{N_\bullet}$ e $g_\bullet \circ f_\bullet \approx id_{M_\bullet}$, onde $id_{M_\bullet}$ e $id_{N_\bullet}$ são apliacação identidade de complexos $M_\bullet$ e $N_\bullet$ respeitivamente.

Similarmente podemos definir homotopia de co-complexos, usando co-complexos e aplicações de co-complexos.

⟨observação141⟩

**Observação 1.4.5**

1. Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são duas aplicações de complexos homotópicas, então $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.
2. Os complexos (co-complexos) de $R$-módulos e aplicações de complexos (co-complexos) forma uma categoria aditiva, que denotamos por $\mathscr{C}^R_\bullet$ ($\mathscr{C}^\bullet_R$).
3. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H_i : \mathscr{C}^R_\bullet \to M_R$ e $H^i : \mathscr{C}^\bullet_R \to M_R$ são funtoroes aditivos e chamados $i$-ésimo funtor de homologia e cohomologia respeitivamente.
4. Suponha que $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ seja um funtor aditivo.
   (a) Se $M_\bullet \in \mathscr{C}^R_\bullet$, então $\mathfrak{F}(M_\bullet) \in \mathscr{C}^S_\bullet$.
   (b) Se $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ uma aplicação de complexos de grau $k$ em $\mathscr{C}^R_\bullet$, então $\mathfrak{F}(f_\bullet) : \mathfrak{F}(M_\bullet) \to \mathfrak{F}(N_\bullet)$ é uma aplicação de complexos de grau $k$ em $\mathscr{C}^S_\bullet$.
   (c) Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são aplicações de complexos homotópicas em $\mathscr{C}^R_\bullet$, então $\mathfrak{F}(f_\bullet), \mathfrak{F}(g_\bullet) : \mathfrak{F}(M_\bullet) \to \mathfrak{F}(N_\bullet)$ são homotópicas em $\mathscr{C}^S_\bullet$.
   (d) Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são aplicações de complexos homotópicas em $\mathscr{C}^R_\bullet$, então $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet)) \to H_i(\mathfrak{F}(N_\bullet))$ em $\mathscr{C}^S_\bullet$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência $L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet$ de complexos de cadeias é dita ser exata, se $L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$ é uma sequência exata de $R$-módulos, para cada $i \in \mathbb{Z}$. A sequência de complexos de cadeias (similarmente, para complexos de cocadeias) $0 \to L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \to 0$ é uma sequência exata curta, se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L_{i+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & M_{i+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & N_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & L_i & \xrightarrow{f_i} & M_i & \xrightarrow{g_i} & N_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_i} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_i} & & \\
0 & \longrightarrow & L_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & N_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

onde as linhas são sequências exatas curtas de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos e as colunas são os complexos de cadeias $L_\bullet$, $M_\bullet$ e $N_\bullet$, respectivamente (similarmente para co-complexos).

Para cada sequência de complexos de cadeias (ou de co-complexos) $0 \to L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \to 0$ existe uma sequência exata longa de módulos de homologia (ou de módulos de cohomologia):

$$\cdots \to \mathrm{H}_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} \mathrm{H}_i(L_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(f_\bullet)} \mathrm{H}_i(M_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(g_\bullet)} \mathrm{H}_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} \mathrm{H}_{i-1}(L_\bullet) \to \cdots .$$

Para gararantir a existênca desta sequência exata longa, faremos antes uma sequência de alguns lemas auxiliares. Mas, primeiramente note que se o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha) & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\alpha) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\beta) & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\beta} & N_2 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\beta) & \xrightarrow{i} & 0
\end{array}$$

de $R$-módulos e $R$-homomorfismos for comutativo, então estistem aplicações induzidas $\overline{f} : \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ e $\overline{g} : \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta)$ definidas por $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Ker}(\beta)$ e $\overline{g}(x + \mathrm{Im}(\alpha)) = g(x) + \mathrm{Im}(\beta)$, respectivamente.

**Lema 1.4.6** (**Lema da serpente**) Seja
⟨serpente⟩

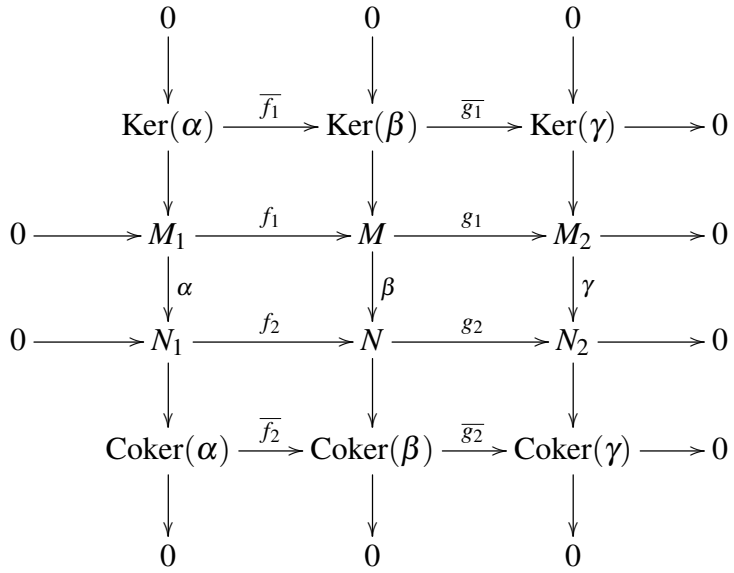
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{g_1} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f_2} & N & \xrightarrow{g_2} & N_2 & &
\end{array}$$

um diagrama comutativo com linhas exatas, tanto à direita como à esquerda, de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos. Então, existe uma aplicação $R$-linear $\Phi : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ tal que a sequência de $R$-módulos, dada por:

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_1}} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_1}} \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}(\gamma)$$

é uma sequência exata.

*Demonstração.* Primeiramente observemos o seguinte diagrama



e com isto a demonstração faremos em três etapas:
**Etapa 1: Exatidão das sequências:** Mostremos que as sequências

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_1}} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_1}} \mathrm{Ker}(\gamma) \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}(\gamma) \longrightarrow 0$$

são exatas, a demonstração é direta pois elas são formadas pelas aplicações dadas na sequência exata (ver no diagrama e na observação antes do lema). Para demonstrar a exatidão da primeira sequência exata: Como $\overline{f_1} = f_1|_{\mathrm{Ker}(\alpha)}$ e $\overline{g_1} = g_1|_{\mathrm{Ker}(\beta)}$, com isto temos que $\mathrm{Ker}(\overline{f_1}) = \mathrm{Ker}(\overline{g_1})$ e $\overline{f_1}$ é injetiva.

Para monstrar a exatidão da segunda sequência: Como $\overline{f_2}(x+\mathrm{Im}(\alpha)) = f_2(x)+\mathrm{Im}(\beta)$ e $\overline{g_2}(x+\mathrm{Im}(\beta)) = g_2(x)+\mathrm{Im}(\gamma)$. Seja $\overline{n_2} \in \mathrm{Coker}(\gamma)$. Então $\overline{n_2} = n_2+\gamma(m_2)$. Como o diagrama é exata, $g_1$ e $g_2$ são sobrejetivas, logo existe $m \in M$ e $n \in N$ tal que $m_2 = g_1(m)$ e $n_2 = g_2(n)$. Nos conseguimos $\overline{n_2} = n_2+\gamma(m_2) = g_2(n)+\gamma(m_2) = \overline{g_2}(n+\beta(m))$. Assim $\overline{g_2}$ é sobrejetiva.

Claramente, é facil calcular que $\overline{g_2}\circ\overline{f_2} = \overline{g_2\circ f_2} = \overline{0}$ e com isto vemos que $\mathrm{Im}(\overline{f_2}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{g_2})$. Para mostrar a inclusão contrária, seja $\overline{n} \in \mathrm{Ker}(\overline{g_2})$. Então $\overline{g_2}(\overline{n}) = \overline{0} \in \mathrm{Coker}(\gamma)$ o qual $g_2(n) = \gamma(m_2)$ para algum $m_2 \in M_2$. Como $g_1$ é sobrejetivo existe um $m \in M$ tal que $g_1(m) = m_2$. Desde que o diagrama é comutativo

$$g_2(n) = \gamma(m_2) = \gamma(g_1(m)) = g_2(\beta(m))$$

o qual implica que $n-\beta(m) \in \mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$, assim existe um $n_1 \in N_1$ tal que

$$f_2(n_1) = n-\beta(m)$$

agora pegando module $\mathrm{Im}(\beta)$, temos

$$f_2(n_1)+\mathrm{Im}(\beta) = \overline{n} = \overline{f_2}(n_1+\mathrm{Im}(\alpha))$$

e segue que $\overline{n} \in \mathrm{Im}(\overline{f_2})$.

**Etapa 2: Construção do homomorfismo conectante $\Phi$:** A aplicação $\Phi : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ é definida como segue: Se $m_2 \in \mathrm{Ker}(\gamma) \subset M_2$. Levantemos isto para para algum $m \in M$ tal que $g_1(m) = m_2$. Considere $n = \beta(m)$.

$$g_2(n) = g_2(\beta(m)) = \gamma(g_1(m)) = \gamma(m_2) = 0.$$

Assim $n \in \mathrm{Ker}(g_2)$. Pela exatitude, $\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$, existe um único $n_1 \in N_1$ (pela injetividade de $f_2$) tal que $n = f_2(n_1)$.

Agora definamos $\Phi(m_2) = n_1 + \mathrm{Im}(\alpha)$. Precisamos verificar se esta definição esta bem definida e não depende do levantamento. De fato, se levantamos $m_2' \in M_2$ para $m' \neq m \in M$ e construindo $n_1'$ como descrito acima, então

$$g_2(n') = \gamma(m_2') = 0$$

e

$$f_2(n_1 - n_1') = n - n' = \beta(m) - \beta(m') = \beta(m - m')$$

e como $m_2 = m_2'$ temos que $m - m' \in \mathrm{Ker}(g_1) = \mathrm{Im}(f_1)$ existe um $m_1 \in M_1$ tal que $m - m' = f_1(m_1)$. Assim

$$f_2(n_1 - n_1') = \beta(m - m') = \beta(f_1(m_1)) = f_2(\alpha(m_1))$$

e como $f_2$ é injetiva $n_1 - n_1' = \alpha(m_1)$ assim estes são os mesmos module $\mathrm{Im}(\alpha)$. Para mostrar que $\Phi$, é suficiente observa que cada aplicação envolvida é um $R$-homomorfismo.

**Etapa 3: Exatidão no link:** Mostraremos que a sequência exata longa é de fato exata em $\mathrm{Ker}(\gamma)$ e em $\mathrm{Coker}(\alpha)$.

Exatidão em $\mathrm{Ker}(\gamma)$: mostraremos que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Im}(\overline{g}_1)$:

($\supseteq$): Seja $\overline{g}_1(m) = m_2 \in \mathrm{Im}(\overline{g}_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\gamma)$. Nos podemos escolher o levantamento $m \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Então $n = \beta(m) = 0$ e escrevendo $0 = n = f_2(n_1)$, como $f_2$ é injetiva, temos $n_1 = 0$. Assim $\overline{n_1} = \overline{0}$ e $\Phi(m_2) = 0$.

($\subseteq$): Agora, seja $m_2 \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Seja $m \in M$ um levantamento de $m_2$. Então $n_1 = \alpha(m_1)$ para algum $m_1 \in M_1$ e pela construção $f_2(n_1) = \beta(m)$. Temos

$$f_2(n_1) = f_2(\alpha(m_1)) = \beta(f_1(m_1))$$

desde que o diagrama é comutativo e obtemos $\beta(m) = \beta(f_1(m_1))$. Isto implica $m' = m - f_1(m_1) \in \mathrm{Ker}(\beta)$.

Agora,

$$g_1(m - f_1(m_1)) = g_1(m) - g_1(f_1(m_1)) - 0 = g_1(m) = m_2$$

e assim $m'$ é também levantamento de $m_2$, e $m' \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Segue $m_2 \in \mathrm{Im}(\overline{g}_1)$.

Exatidão em $\mathrm{Coker}(\alpha)$: mostraremos que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\overline{f}_2)$:

($\subseteq$): Seja $\overline{n_1} \in \mathrm{Im}(\Phi)$. Então existe $m_2 \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ tal que $\overline{n}_1 = \Phi(m_2)$. Escolhamos um representante $n_1$ of $\overline{n}_1$. Então pela construção $f_2(n_1) = \beta(m)$. Pegando isto module $\mathrm{Im}(\beta)$ temos $\overline{f}_2(\overline{n_1}) = 0$. Therefore $\overline{n_1} \in \mathrm{Ker}(\overline{f}_2)$.

($\supseteq$): Seja $\overline{n_1} \in \mathrm{Ker}(\overline{f}_2)$. Para algum levantamento $n_1$ de $m_2$, temos $f_2(n_1) = \beta(m)$. Tomando $m_2 = g_1(m)$. Temos

$$\gamma(m_2) = \gamma(g_1(m)) = g_2(\beta(m)) = g_2(f_2(n_1)) = 0$$

$g_2 \circ f_2 = 0$ pela exatidão. Assim $m_2 \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Claramente, pela construção temos $\overline{n_1} = \Phi(m_2)$. Então $\overline{n_1} \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

■

⟨serpente1⟩ **Lema 1.4.7** Se $M_\bullet$ é um complexo de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então a aplicação $\alpha_i : M_i \to M_{i-1}$ induz um homomorfismo $\overline{\alpha}_i : \mathrm{Coker}(\alpha_{i+1}) \to \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$ de $R$-módulos. Além disso, $\mathrm{H}_i(M_\bullet) = \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}_i)$ e $\mathrm{H}_{i-1}(M_\bullet) = \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}_i)$.

*Demonstração.* Como $\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, podemos definir um $R$-homomorfismo sobrejetivo $\overline{\alpha}_i : M_i/\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \to M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i)$ da seguinte forma $x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \mapsto x + \mathrm{Ker}(\alpha_i)$. Mas, pelo teorema do isomorfismo, como $M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i) \cong \mathrm{Im}(\alpha_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$, segue que temos a aplicação $\overline{\alpha}_i : \mathrm{Coker}(\alpha_{i+1}) \to \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$.

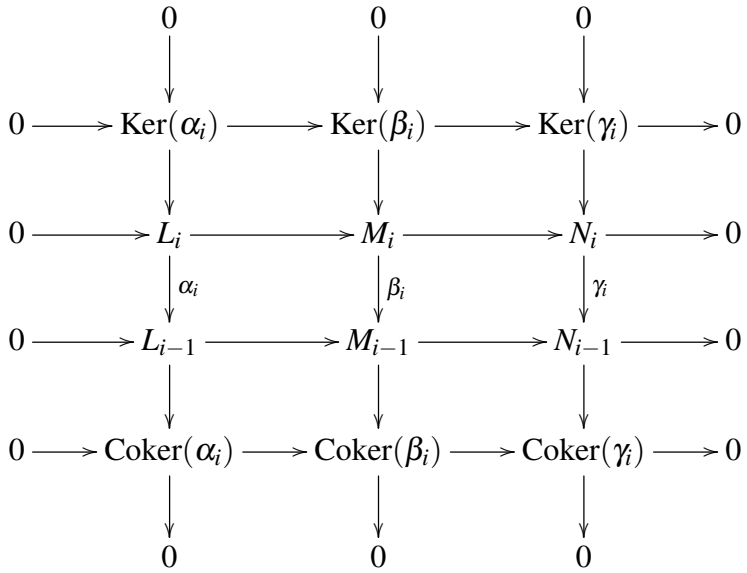
Agora, $\mathrm{H}_i(M_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_i)}{\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})} = \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}_i)$, a primeira igualdade é pela definição e a segunda é pelo cálculo direto do nucleo de $\overline{\alpha}_i$ e além disso

$$\mathrm{H}_{i-1}(M_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})}{\mathrm{Im}(\alpha_i)} = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})}{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}_i)} = \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}_i),$$

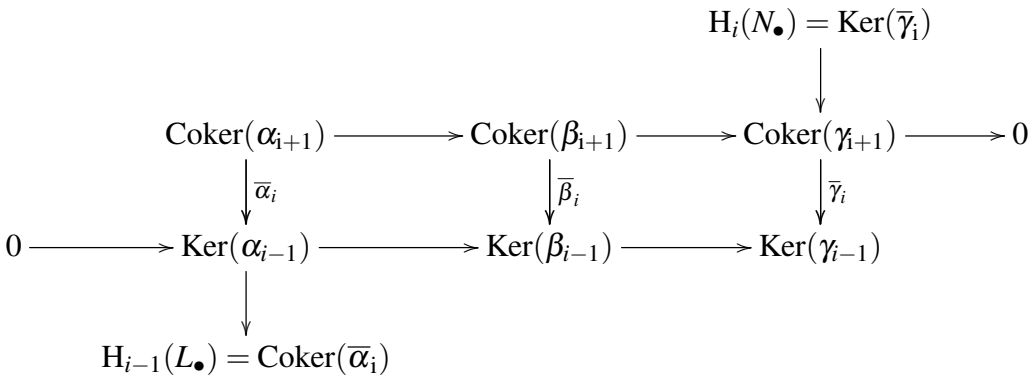
a primeira igualdade também é pela definição e a segunda igualdade pelo isomorfismo acima e a definição do Coker de $\overline{\alpha}_i$. ■

No Lema da Serpente 1.4.6, se $f_1$ for injetiva e $g_2$ for sobrejetiva, então $\overline{f}_1$ é injetiva e $\overline{g}_2$ é sobrejetiva.

Consideremos uma sequência exata de complexos (ou co-complexos) $0 \to L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \to 0$. Então, para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos o seguinte diagrama comutativo com as linhas sendo sequências exatas curtas:




Usando este diagrama e o Lema 1.4.7, conseguimos o seguinte diagrama:




para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Logo, pelo Lema da Serpente 1.4.6 existe um $R$-homomorfismo conectante $\Phi_i : \mathrm{H}_i(N_\bullet) \to \mathrm{H}_{i-1}(L_\bullet)$.

Portanto, temos a sequência exata longa de $R$-módulos de homologia.

?⟨SELhomologia⟩? **Teorema 1.4.8** Considere a sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \to L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \to 0.$$

Então, existe uma sequência exata longa de $R$-módulos de homologia:

$$\cdots \to \mathrm{H}_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} \mathrm{H}_i(L_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(f_\bullet)} \mathrm{H}_i(M_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(g_\bullet)} \mathrm{H}_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} \mathrm{H}_{i-1}(L_\bullet) \to \cdots.$$

A aplicação $\Phi_i$ é um $R$-homomorfismo conectante de $R$-módulos de homologia, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

De maneira semelhante, podemos também ter uma sequência exata longa de $R$-módulos de cohomologia.

⟨SELCohomologia⟩ **Teorema 1.4.9** Considere a sequência exata curta de cocomplexos:

$$0 \to L^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} N^\bullet \to 0.$$

Então, existe uma sequência exata longa de $R$-módulos de cohomologia:

$$\cdots \to \mathrm{H}^{i-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\Phi^{i-1}} \mathrm{H}^i(L^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(f^\bullet)} \mathrm{H}^i(M^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(g^\bullet)} \mathrm{H}^i(N^\bullet) \xrightarrow{\Phi^i} \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet) \to \cdots.$$

A aplicação $\Phi^i$ é um $R$-homomorfismo conectante de $R$-módulos de cohomologia, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

## 1.5 Algumas propriedades

⟨FunctorComuta⟩ **Teorema 1.5.1** Seja $\mathfrak{F} : \mathscr{M}_R \to \mathscr{M}_S$ um funtor aditivo covariante. Então $\mathfrak{F}$ é exato, se e somente se, para cada $M_\bullet \in \mathscr{C}_\bullet^R$ e para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\mathfrak{F}(H_i(M_\bullet)) \cong H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet)).$$

Em particular se $S$ é um subconjunto multiplicativamente fechado de $R$, então $S^{-1}(H_i(M_\bullet)) \cong H_i(S^{-1}(M_\bullet))$.

Para demonstrar este resultado, precisamos de um lema auxiliar.

**Lema 1.5.2** Se $\mathfrak{F} : \mathscr{M}_R \to \mathscr{M}_S$ é um funtor aditivo, $M,N \in \mathscr{M}_R$ e $0 : M \to N$ é o homomorfismo nulo, então

1. $\mathfrak{F}(0 : M \to N) = 0 : \mathscr{F}(M) \to \mathfrak{F}(N)$;
2. $\mathfrak{F}(\{0\}) = \{0\}$.

*Proof.* 1. Sendo $\mathfrak{F}$ aditivo, então as funções

$$\mathfrak{F}_{M,N} : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_S(\mathfrak{F}(M),\mathfrak{F}(N))$$

são homomorfismos de grupos, pontanto preservam os elementos neutros, isto é,

$$\mathfrak{F}(0 : M \to N) = 0 : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N).$$

2. Como $Id_M = 0$ se, e somente se, $M = \{0\}$ e de $(1)$ temos que:

$$Id_{\mathfrak{F}(\{0\})} = \mathfrak{F}(Id_{\{0\}}) = \mathfrak{F}(0) = 0,$$

então $\mathfrak{F}(\{0\}) = 0$. ■

*Prova do Teorema 1.* Suponha $\mathfrak{F}$ exato e seja $M_\bullet \in \mathscr{C}^R_\bullet$ um complexo.

$$M_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

Queremos mostrar que $\mathfrak{F}(H_i(M_\bullet)) \cong H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet))$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para isso, mostraremos que $\mathfrak{F}$ preserva quocientes e comuta com núcleos e imagens.

Sejam $M$ um $R$-módulo, $N \subseteq M$ um $R$-submódulo e considere a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0,$$

na qual $i$ é a inclusão e $p$ é a projeção canônica.

Como $\mathfrak{F}$ é exato, temos que a sequência curta abaixo é exata:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(i)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(p)} \mathfrak{F}(M/N) \longrightarrow 0.$$

Portanto, pelo Primeiro Teorema do Isormofismo, temos que:

$$\mathfrak{F}(M/N) \cong \mathfrak{F}(M)/\mathfrak{F}(N).$$

Seja $f : M \to N$ um $R$-homomorfismo e considere a sequência exata curta abaixo:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathfrak{F}$ é exato, temos que a sequência curta abaixo é exata:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathrm{Ker}(f)) \xrightarrow{\mathfrak{F}(i)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{F}(\mathrm{Im}(f)) \longrightarrow 0.$$

Portanto:

- $\mathfrak{F}(f)$ é sobrejetora, isto é, $\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(f)) = \mathfrak{F}(\mathrm{Im}(f))$;
- $\mathfrak{F}(i)$ é injetora, isto é, $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(f)) = \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(i)) = \mathfrak{F}(\mathrm{Ker}(f))$.

Segue que

$$\mathfrak{F}(H_i(M_\bullet)) = \mathfrak{F}\left(\frac{\mathrm{Ker}(\alpha_i)}{\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})}\right) \cong \frac{\mathfrak{F}(\mathrm{Ker}(\alpha_i))}{\mathfrak{F}(\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}))} = \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_i))}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_{i+1}))} = H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet)).$$

Reciprocamente, suponha que para cada $M_\bullet \in \mathscr{C}_\bullet^R$ e para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\mathfrak{F}(H_i(M_\bullet)) \cong H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet)).$$

Queremos mostrar que $\mathfrak{F}$ é exato. Para isso considere a sequência exata curta abaixo:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0. \tag{1.1}\{?\}$$

Note que podemos ver (1) como um complexo $M_\bullet$ com $M_1 = P$, $M_2 = M$, $M_3 = N$ e $M_i = 0$ para os índices restantes. Pela sua exatidão, obtemos que $H_i(M_\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e sendo $\mathfrak{F}$ aditivo, temos que $\mathfrak{F}(H_i(M_\bullet)) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, aplicando $\mathfrak{F}$ em (1) temos o complexo:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{F}(P) \longrightarrow 0. \tag{1.2}\{?\}$$

Por fim, tomando homologia nos níveis um, dois e três chegamos a:

- $H_1(\mathfrak{F}(M_\bullet)) = \dfrac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(P) \to 0)}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(g))} = \dfrac{\mathfrak{F}(P)}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(g))}$;
- $H_2(\mathfrak{F}(M_\bullet)) = \dfrac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(g))}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(f))}$;
- $H_3(\mathfrak{F}(M_\bullet)) = \dfrac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(f))}{\mathrm{Im}(0 \to \mathfrak{F}(N))} = \dfrac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(f))}{0}$.

Usando a hipótese de que $\mathfrak{F}$ comuta com a homologia concluímos que cada uma das homologias calculadas é igual a 0, logo:

- $\mathfrak{F}(P) = \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(g)) \Rightarrow \mathfrak{F}(g)$ é sobrejetora;
- $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(g)) = \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(f))$;
- $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(f)) = 0 \Rightarrow \mathfrak{F}(f)$ é injetora;

ou seja, a sequência curta (2) é exata e portanto $\mathfrak{F}$ é exato. ■

**Proposição 1.5.3** Seja $R$ um anel commutativo. Sejam $M$, $N$ $R$-módulos e $S$ um subconjunto multiplicativamente fechado de $R$.

(i) Para cada $\frac{f}{s} \in S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(M,N))$ a aplicação $f_s : S^{-1}M \to S^{-1}N$ dado por $f_u(\frac{m}{t}) = \frac{f(m)}{st}$ é um $S^{-1}R$-homomorfismo bem definido. Também a aplicação $F_{M,N} : S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ dado por $F_{M,N}(\frac{f}{s}) = f_s$ é um $S^{-1}R$-homomorfismo bem definido.

(ii) Assuma que $M$ é finitamente presentado. Então

$$S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

*Demonstração.* O item $(i)$ é deixado para o leitor. Provaremos o item $(ii)$. Note que se $M = R^n$ é livre de posto $n$, o homomorfismo $F_{M,N}$ é um isomomorfismo, ja que

$$\begin{aligned} S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) &\cong S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(R^n,N)) \\ &\cong (S^{-1}N)^n \\ &\cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}((S^{-1}R)^n, S^{-1}N) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N). \end{aligned}$$

Como $M$ é de presentação finita, temos a sequência exata

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

e aplicando os funtores exatos a esquerda e tensorizando por $S^{-1}R$, teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(R^n,N)) & \longrightarrow & S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(R^n,N)) & \xrightarrow{g_0} & S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(R^m,N)) \\ & & \downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n,S^{-1}N) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m,S^{-1}N) \end{array}$$

Como as linhas verticais da direita são isomorfas, então a primeira linha vertical é também um isomorfismo. ■

### 1.5.1 Exercícios

1. Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são duas aplicações de complexos homotopicas, então $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.
2. Os complexos (co-complexos) de $R$-módulos e aplicações de complexos (co-complexos) forma uma categoria aditiva, que denotamos por $\mathscr{C}_\bullet^R$ ($\mathscr{C}_R^\bullet$).
3. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H_i : \mathscr{C}_\bullet^R \to M_R$ e $H^i : \mathscr{C}_R^\bullet \to M_R$ são funtoroes aditivos e chamados $i$-ésimo funtor de homologia e cohomologia respeitivamente.
4. Suponha que $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ seja um funtor aditivo.
   (a) Se $M_\bullet \in \mathscr{C}_\bullet^R$, então $\mathfrak{F}(M_\bullet) \in \mathscr{C}_\bullet^S$.
   (b) Se $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ uma aplicação de complexos de grau $k$ em $\mathscr{C}_\bullet^R$, então $\mathfrak{F}(f_\bullet) : \mathfrak{F}(M_\bullet) \to \mathfrak{F}(N_\bullet)$ é uma aplicação de complexos de grau $k$ em $\mathscr{C}_\bullet^R$.
   (c) Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são aplicações de complexos homotópicas em $\mathscr{C}_\bullet^S$, então $\mathfrak{F}(f_\bullet), \mathfrak{F}(g_\bullet) : \mathfrak{F}(M_\bullet) \to \mathfrak{F}(N_\bullet)$ são homotopicas em $\mathscr{C}_\bullet^S$.
   (d) Se $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são aplicações de complexos homotópicas em $\mathscr{C}_\bullet^S$, então $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet)) \to H_i(\mathfrak{F}(N_\bullet))$ em $\mathscr{C}_\bullet^S$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

⟨comuta⟩

5. Seja $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ um funtor aditivo. Prove que $\mathfrak{F}$ é um funtor exato se, e somente se, para cada $M_\bullet \in \mathscr{C}_\bullet^R$, a homologia comuta com o funtor, isto é, $\mathfrak{F}H_i(M_\bullet) = H_i(\mathfrak{F}(M_\bullet))$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. O mesmo ocorre para cohomologias. Dica: é suficiente mostrar que funtores aditivos e exatos comutam e preservam núcleo, imagem e quociente.
6. (Característica de Euler) Seja $(M_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de $R$-módulos de comprimento finito, e com um número finito de componentes $M_i \neq 0$. A **característica de Euler** é definida como:

$$\mathfrak{X}(M_\bullet, d_\bullet) := \sum_i (-1)^i \,\mathrm{length}\,(\mathrm{H}(M_\bullet, d_\bullet)).$$

Seja,

$$0 \to M'_\bullet \to M_\bullet \to M''_\bullet \to 0,$$

uma sequência exata curta de complexos de cadeias, como definido no texto acima. Mostre então que:

$$\mathfrak{X}(M_\bullet, d_\bullet) = \mathfrak{X}\left(M'_\bullet, d'_\bullet\right) + \mathfrak{X}\left(M''_\bullet, d''_\bullet\right).$$

7. Seja $R$ um anel comutativo e seja $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativamente fechado. Seja $M_\bullet$ um $R$-complexo e seja $N$ um $R$-módulo. Demosntre as seguintes afirmações
   (a) Se $N$ é finitamente apresentado, então existe um isomorfismo de $S^{-1}R$-complexos

   $$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}N, S^{-1}M_\bullet) \cong S^{-1}\mathrm{Hom}_R(N, M_\bullet).$$

   (b) Se $M_i$ é finitamente apresentado, então existe um isomorfismo de $S^{-1}R$-complexos

   $$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_\bullet, S^{-1}N) \cong S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M_\bullet, N).$$

   (c) existe um isomorfismo de $S^{-1}R$-complexos

   $$S^{-1}N \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}M_\bullet \cong S^{-1}R(N \otimes_R M_\bullet).$$

# Parte II

# 2. Módulos injetivo, projetivo, plano e reso

## 2.1 Módulos injetivos

Se $W$ é um subespaço vetorial de um espaço vetorial $V$ de dimensão finita, então $W$ é um somando direto de $V$. Isto segue de álgebra linear pois uma base de $W$ pode ser estendida para uma base de $V$. Há $R$-módulos que possuem esta propriedade de somando mesmo que eles não tenham uma base. Tais módulos, são chamados de módulos injetivos, e estes formam uma classe importante de módulos.

**Definição 2.1.1** Um $R$-módulo $M$ é **injetivo**, se qualquer uma das seguintes condições equivalentes forem satisfeitas:

1. Dada qualquer sequência exata à esquerda $0 \to X \to N$ de $R$-módulos e um $R$-homomorfismo $\phi : X \to M$, existe uma aplicação $\tilde{\phi} : N \to M$, a qual é um $R$-homomorfismo, tal que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & \swarrow{\scriptstyle \tilde{\phi}} & \\ & & M & & \end{array}$$

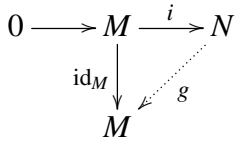
2. O funtor $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ é um **funtor exato**.

É fácil mostrar que se $M$ and $N$ são $R$-módulos isomorfos, então $M$ é injetivo se, e somente se, $N$ é injetivo.

**Proposição 2.1.2** Se $M$ é um $R$-submódulo injetivo do $R$-módulo $N$, então $M$ é um somando direto de $N$.

*Demonstração.* Seja $M$ um $R$-submódulo de um $R$-módulo $N$ e considere o diagrama exato

linha de $R$-módulos




onde $\mathrm{id}_M$ é uma aplicação identidade sobre $M$ e $i$ é a injeção canônica. Se $g : N \to M$ completa o diagrama comutativamente, por ser $M$ injetivo, então $g \circ i = \mathrm{id}_M$. Segue que $g$ é uma aplicação cisão para $i$. Agora o resultado segue da Proposição 1.2.10, que $N = M \oplus \mathrm{Ker(g)}$. ■

Falando a grosso modo. Um módulo $M$ sobre um anel com unidade $R$ é chamado injetivo se e somente se, sempre que $M$ está contido como um submódulo de $N$, existe um submódulo $X$ de $N$ tal que $M$ somando direto de $N$ (iso é $N = M \oplus X$).

Observe que, não todo $R$-módulo é injetivo. O subconjunto $\{0,2\}$ de $\mathbb{Z}_4$ é um exemplo de um $\mathbb{Z}$-módulo não injetivo; isto é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Z}_4$, e é isomorfo para $\mathbb{Z}_2$; não entanto $Z_4$, não é isomorfo para $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Por exemplo, seja $2\mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}$-submódulo do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$. Temos que $2\mathbb{Z}$ não é injetivo, pois não é somando direto de $\mathbb{Z}$.

Uma outra propriedade de $R$-módulo injetivo é que o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é exato.

⟨hominjective⟩ **Proposição 2.1.3** Um $R$-módulo $M$ é injetivo se, e somente se para cada sequência exata $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g} N_2$ de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, a sequência

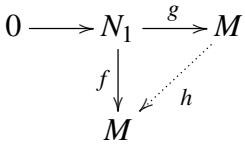
$\mathrm{Hom}_R(N_2,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N_1,M) \longrightarrow 0$ é exata como $R$-módulos e $R$-homomorfismos.

*Demonstração.* Se $M$ é injetivo e $f \in \mathrm{Hom}_R(N_1,M)$, então existe uma $R$-homomorfismo $h : N_2 \to M$ tal que $f = h \circ g = g^*(h)$. Isto mostra que $g^*$ é sobrejetora, portanto

$$\mathrm{Hom}_R(N_2,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N_1,M) \longrightarrow 0$$

é exato.

Reciprocamente, se $\mathrm{Hom}_R(N_2,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N_1,M) \longrightarrow 0$ é exato e seja $f \in \mathrm{Hom}_R(N_1,M)$, como $g^*$ é sobrejetivo, existe um $h \in \mathrm{Hom}_R(N_2,M)$ tal que $g^*(h) = f$. Mas como $h \circ g = f$, o diagrama




é comutativo e consequêntemente, $M$ é injetivo. ■

⟨homexato⟩ **Corolário 2.1.4** Um $R$-módulo $M$ é injetivo se, e somente se o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é exato.

⟨Propo43⟩ **Proposição 2.1.5** Seja $R \to S$ um homomorfismo de álgebras e seja $M$ um $R$-módulo injetivo. Então $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ é um $S$-módulo injetivo.

*Demonstração.* Note que $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ é um $S$-módulo com a seguinte multiplicação:

$$\begin{array}{rcl} S \times \mathrm{Hom}_R(S,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(S,M) \\ (s, f(s')) & \longmapsto & f(ss'), \quad \forall s' \in S. \end{array}$$

Agora, pela Fórmula de Adjunção, temos os seguintes isomorfismos,

$$\mathrm{Hom}_S(\cdot, \mathrm{Hom}_R(S,M)) \cong \mathrm{Hom}_R(\cdot \otimes_S S, M) \cong \mathrm{Hom}_R(\cdot, M).$$

Assim, $M$ é injetivo se, e somente se, $\mathrm{Hom}_R(\cdot,M)$ é exato. Que é equivalente a dizer que $\mathrm{Hom}_S(\cdot,\mathrm{Hom}_R(S,M))$ é exato e, portanto, $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ é injetivo. ■

**Observação 2.1.6** 1. Seja $R$ um anel. Se $M$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo, então $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$ é um $R$-módulo injetivo. Isto segue, como $R$ é um $(\mathbb{Z},R)$-bimódulo, então $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$ é um $R$-módulo, agora aplicando a Proposição 2.1.5.

2. Um caso particular é quando $S = \dfrac{R}{I}$. Se $E$ é um $R$-módulo injetivo, então

$$\mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{I}, E\right) \cong \mathrm{ann}_E I \subseteq E$$

é um $S$-módulo injetivo.

?⟨Baer⟩? **Teorema 2.1.7** **(Critério de Baer's)** Seja $R$ um anel e $E$ um $R$-módulo. Então $E$ é injetivo se, e somente se, para todo ideal $I \subseteq R$ e qualquer diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \end{array}$$

existe uma aplicação $g : R \to E$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & \nearrow{\scriptstyle g} & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \end{array}$$

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Imediata! Pelo fato que $E$ é um $R$-módulo injetivo.

($\Leftarrow$) É suficiente mostrar que se $N$ é um $R$-módulo, $M$ é um submódulo de $N$, e $f : M \to E$ é um homomorfismo de $R$-módulos. Então existe um homomorfismo $\overline{f} : N \to E$ tal que $\overline{f}_{|M} = f$.

Usaremos o Lema de Zorn. Suponha que temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

e considere o conjunto

$$\Lambda := \{(K, f_K) \ : \ M \subseteq K \subseteq N, \ f_K : K \to E, \ f_K|_M = f\}$$

que é não vazio, pois $(M,f) \in \Lambda$.

Em $\Lambda$, coloquemos a seguinte ordem parcial $(K, f_K) \leqslant (L, f_L) \Leftrightarrow K \subseteq L$ e $f_L|_K = f_K$. Pelo Lema de Zorn, existe $(K, f_K) \in \Lambda$ maximal. Suponha que $K \subsetneq N$ e escolha $x \in N \setminus K$, $x \neq 0$, e tome $I = (K :_R x) = \{a \in R : ax \in K\} \subseteq R$ um ideal em $R$.

Agora considere

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_K} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & K + xR \end{array}$$

queremos definir $h : K + xR \to E$ que estende $f_K$ e chegar a uma contradição, já que $(K, f_K)$ é maximal.

Note que, para qualquer $a \in I$, temos que $ax \in K$ (pela definição de $I$), logo, se tal $h$ existisse, deveríamos ter

$$ah(x) = h(ax) = f_K(ax).$$

Considere

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_K(\cdot x)} & \nearrow{\scriptstyle \exists \varphi} & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \end{array}$$

Por hipótese, existe $\varphi : R \to E$ que faz o diagrama comutar. Logo, para $a \in I$,

$$f_K(ax) = \varphi(a \cdot 1) = a\varphi(1).$$

Agora definamos $h(x) := \varphi(1)$. Temos

$$\begin{array}{rccl} h: & K + xR & \longrightarrow & E \\ & k & \longmapsto & f_K(k),\ \forall k \in K \\ & x & \longmapsto & \varphi(1) \end{array}$$

Falta mostrar que $h$ está bem definida. Suponha que $k + rx = k' + r'x$, então $k - k' = (r' - r)x \in K$ e assim $r' - r \in I$. Logo,

$$f_K(k - k') = f_K((r' - r)x) = (r' - r)\varphi(1)$$

e então

$$h(k + rx) = f_K(k) + r\varphi(1) = f_K(k') + r'\varphi(1) = h(k' + r'x).$$

Assim, $(K + xR, h)$ estende $(K, f_K)$ propriamente, o que é uma contradição.

Portanto, $K = N$ e então $E$ é injetivo. ■

**Corolário 2.1.8** Seja $R$ um domínio de integridade e sea $\mathrm{Frac}(Q)$ o corpo de frações de $R$. Então $\mathrm{Frac}(Q)$ é um $R$-módulo injetivo. Em particular $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

*Proof.* Seja $I$ um ideal de $R$ e seja $f : I \to K$ um homomorfismo de $R$-módulos. Para $0 \neq r, s \in I$ nos temos

$$rf(s) = f(rs) = sf(r)$$

Como consequência em $K$ temos $f(r)/r = f(s)/s$ para qualquer $0 \neq r, s \in I$. Denote este elemento por $a$.

Defina, $\overline{f} : R \to K$, $\overline{f}(r) = ra$.

Mostre que $\overline{f}$ é um homomorfismo de $R$-módulos e $\overline{f}_{|I} = f$. Pelo critério de Baer's segue que $K$ é um $R$-módulo injetivo. ■

### 2.1.1 Módulos Divisíveis

**Definição 2.1.9** Seja $R$ um domínio de integridade (o qual é, muitas vezes, simplesmente chamado de domínio). Um $R$-módulo $M$ é **divisível**, se $rM = M$ para todo elemento não nulo $r \in R$. Em outras palavras, se a aplicação produto $r\cdot : M \to M$ é sobrejetiva para cada $r \in R$.

Observe que, se $R$ é um domínio de ideais principais (DIP), então um $R$-módulo $M$ é divisível se, e somente se, dado $r \in R$ um elemento não nulo e um $u \in M$, existe um $v \in M$ tal que $rv = u$.

⟨Ex1⟩ **Exemplo 2.1.10**

1. Todo módulo sobre um corpo $k$ é divisível, pois qualquer $x \neq 0$ em $k$ é unidade.
2. $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível. Mais geralmente, se $R$ é um domínio, seu corpo de frações $\mathrm{Frac}(R)$ é divisível.
3. Se $M$ é divisível e $N \subseteq M$, então $\dfrac{M}{N}$ é divisível.

?⟨Ex4⟩? 4. Somas diretas e produtos diretos de módulos divisíveis são divisíveis.

?⟨Ex5⟩? 5. Qualquer módulo injetivo é divisível.
De fato, seja $E$ um $R$-módulo injetivo. Seja $x \in R$ um NDZ e $u \in E$. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\cdot x} & R \end{array}$$

onde $f(1) = u$. Então, existe $g : R \to E$ tal que

$$u = f(1) = g(1 \cdot x) = xg(1).$$

Logo, basta tomar $v = g(1) \in E$.

?⟨Ex6⟩? 6. Se $R$ é um DIP, então um $R$-módulo $E$ é injetivo se, e somente se, $E$ é divisível.
De fato, a "ida" vale sempre, pelo exemplo anterior.
Reciprocamente, suponha que $E$ é divisível. Seja $x \in R$ um NDZ e $u \in E$. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & (x) & \xrightarrow{i} & R \end{array}$$

com $f(x) = u$ e $i$ a inclusão. Como $R$ é DIP, para mostrar que $E$ é injetivo basta mostrar que existe $g : R \to E$ que faz o diagrama comutar (pelo Critério de Baer), o que segue diretamente do fato de $E$ ser divisível:

$$\exists v \in E \text{ tal que } f(x) = u = xv,$$

basta definir $g(x) = xv$. Portanto o resultado segue.

?⟨Ex7⟩? 7. Sejam $N \subseteq M$ $R$-módulos e suponha que $N$ e $\dfrac{M}{N}$ sejam divisíveis. Então $M$ é divisível.

De fato, seja $x \in R$ um NDZ e $u \in M$. Como $\frac{M}{N}$ é divisível, $\overline{u} = x\overline{v}$, para algum $\overline{v} \in \frac{M}{N}$, isto é, $u - xv \in N$.
Por outro lado, $N$ é divisível, então $u - xv = xw$, para algum $w \in N$.
Logo, $u = x(v+w)$.

⟨imagfree⟩ **Observação 2.1.11** Qualquer $R$-módulo $M$ é imagem homeomorfica de um $R$-módulo livre. Alem disso, se $M$ é finitamente gerado, então o $R$-módulo livre pode ser escolhido com um $R$-módulo finitamente gerado. Para provar isto é suficiente pegar um conjunto de geradores, $\{m_i\}_{i\in I}$ onde $I$ é um conjuto de índices, de $M$. Logo defina um homomorfismo sobrejetivo $f : R^I \to M$.

⟨Propo45⟩ **Proposição 2.1.12** Seja $R$ um anel e $M$ um $R$-módulo. Então existe um módulo injetivo $I$ tal que $M \subseteq I$, i.é, todo módulo está mergulhado num $R$-módulo injetivo.

*Demonstração.* **Caso particular:** Suponhamos que $R = \mathbb{Z}$.
Pela observação 2.1.11, todo $\mathbb{Z}$-módulo $M$ é tal que

$$M \cong \frac{\oplus\mathbb{Z}}{H} \hookrightarrow \frac{\oplus\mathbb{Q}}{H} := \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}.$$

Pelo Exemplo 2.1.10 item (2), $\mathbb{Q}$ é divisível, logo $\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível, pelo Exemplo 2.1.10 itens (4) e (3). Finalmente, $\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ é injetivo pelo Exemplo 2.1.10 item (6), pois $\mathbb{Z}$ é DIP.

**Caso geral:** Sabemos que existe uma aplicação canônica de anéis $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ que manda 1 em 1. Assim, pela Proposição 2.1.5, $I := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathrm{I}_{\mathbb{Z}})$ é um $R$-módulo injetivo.

Sabemos que $M$ é um $R$-módulo e também é um $\mathbb{Z}$-módulo (via $\varphi$), assim temos uma aplicação injetiva, como no caso anterior

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}.$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \cdot)$, que é exato à esquerda, temos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}) = I.$$

Então,

$$M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M).$$

Logo,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}) = I.$$

■

**Observação 2.1.13** Se $M$ é divisível sobre $R$, então $M$ não é necessariamente divisível sobre $\mathbb{Z}$.

Por exemplo, $\mathbb{Z}_p$ é um corpo e, consequentemente, divisível e, portanto, injetivo como $\mathbb{Z}_p$-módulo ($\mathbb{Z}_p$ é DIP).

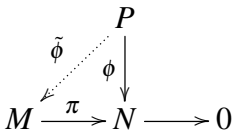
Entretanto, $\mathbb{Z}_p$ não é divisível como $\mathbb{Z}$-módulo, já que não vale a propriedade da definição para $p \in \mathbb{Z}$.

## 2.2 Módulos projetivos

Um $R$-módulo projetivo pode ser encarado como o dual de um $R$-módulos injetivo. Para obter a definição de um $R$-módulo projetivo simplesmente podemos reverter as linhas do diagrama dado na definição de $R$-módulos injetivos. Mas precisamente, defimos a seguir quando um $R$-módulo é projetivo.

**Definição 2.2.1** Um $R$-módulo $P$ é **projetivo**, se qualquer uma das seguintes condições equivalentes for satisfeita:

1. Dada qualquer sequência exata à direita $M \to N \to 0$ de $R$-módulos e um $R$-homomorfismo $\phi : P \to N$, existe uma aplicação $\tilde{\phi} : P \to M$, a qual é um $R$-homomorfismo, tal que o diagrama abaixo é comutativo:




2. O funtor $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ é um **funtor exato**.
3. Toda sequência exata curta $0 \to M' \to M \to P \to 0$ de $R$-módulos cinde.
4. Existe um $R$-módulo livre $F$ tal que $F \cong P \oplus Q$, para algum $R$-módulo $Q$.

⟨exatop⟩ **Proposição 2.2.2** Um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se, para cada sequência exata $N_1 \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$ de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, a sequência $\mathrm{Hom}_R(P,N_1) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,N_2) \longrightarrow 0$ é exata como $R$-módulos e $R$-homomorfismos.

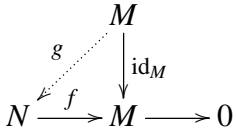
*Demonstração.* A prova desta proposição é semelhante (ou dual) à Proposição 2.1.3. ■

⟨homexatopro⟩ **Corolário 2.2.3** Um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se, o funtor covariante $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ é exato.

Um $R$-submódulo injetivo $M$ é um somando direto de um $R$-módulo $N$, isto é $M$ se estende para $N$. De fato, se $M$ é injetivo e $f : M \to N$ é um homomorfismo injetivo, então existe um submódulo $X$ de $N$ tal que $M \cong X$ e $X$ é um somando direto de $N$. Módulos projetivos desfrutam de uma propriedade semelhante.

⟨somando2⟩ **Proposição 2.2.4** Se $f : N \to M$ é um $R$-homomorfismo sobrejetivo e $M$ é um $R$-módulo projetivo, então $M$ é um somando diteto de $N$.

*Demonstração.* Como a linha do diagrama é exata,



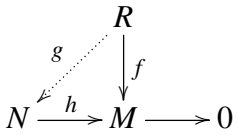

este pode ser completado comutativamente por um $R$-homomorfismo $g$ tal que $f \circ g = id_M$, onde $g$ é uma aplicação cisão para $f$ e $g$ é um monomorfismo. Pela Proposição 1.2.11, temos que $N = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(g)$. Assim o resultado segue pois $\mathrm{Im}(f) \cong M$. ■

⟨directasoma⟩ **Observação 2.2.5** Se $\{M_i\}_{i\in I}$ é uma família de $R$-módulos, então $\bigoplus_I M_{i\in I}$ é projetivo se, e somente se, cada $M_i$ é projetivo. Para mostrar esta observação use a Proposição 2.2.2.

Da observação 2.2.5, segue que o somando direto de um módulo projetivo é projetivo.

⟨anelproj⟩ **Lema 2.2.6** Uma anel $R$ é um $R$-módulo projetivo

*Demonstração.* Precisamos demosntrar que qualquer linha exata no diagrama




pode ser comutativamente completada por um $R$-homomorfismo $g : R \to N$. Se $f(1) = y$ e seja $x \in N$ tal que $h(x) = y$. Definamos $g(r) = rx$. Então $g$ esta bem definida, é um homomorfismo e $f = h \circ g$. ■

⟨projfree⟩ **Proposição 2.2.7** Qualquer $R$-módulo livre é projetivo.

*Demonstração.* Se $F$ é um $R$-módulo livre, então existe um conjunto de índices $I$ tal que $R^I \cong F$. Usando o Lemma 2.2.6 e que a soma direta de módulos projetivos é projetivo (ver a observação 2.2.5 ou exercício abaixo). ■

⟨homeoproj⟩ **Corolário 2.2.8** Qualquer $R$-módulo é imagem homeomorfica de um $R$-módulo projetivo.

*Demonstração.* Pela Observação 2.1.11, temos que qualquer $R$-módulo é imagem homeomorfica de um $R$-módulo livre e um $R$-módulo livre é, pela Proposição 2.2.7, projetivo. ■

⟨somando3⟩ **Proposição 2.2.9** Um $R$-módulo $M$ é projetivo se, e somente se é isomorfo a um somando direto de um $R$-módulo livre.

⟨propsomandop1⟩

*Demonstração.* Se $M$ é um $R$-módulo projetivo, então pela Observação 2.1.11 temos um um $R$-módulo livre $R^I$ e um homomorfismo sobrejetivo $f : R^I \to M$, agora aplicando a Proposição 2.2.4 temos uma implicação.

Reciprocamente, suponhamos que $R^I \cong M \oplus N$ para algum $R$-módulo $N$, então por 2.2.7 e como a soma direta de módulos projetivos é projetivo, temos que $M$ é projetivo. ■

**Exemplo 2.2.10** Sejam $P_1$ and $P_2$ dois $R$-módulos projetivos finitamente gerados. Então $P_1 \otimes_R P_2$ é também um $R$-módulo projetivo. De fato, pela Proposição 2.2.9 existem $R$-módulos $K_i$ e $R$-módulos $F_i$ livres tal que $P_i \oplus K_i = F_i$, $i = 1, 2$, onde $F_1 = R^n$ and $F_2 = R^m$. Então $F_1 \otimes_R F_2 = (P_1 \otimes_R P_2) \oplus K$, onde $K = (P_1 \otimes_R K_2) \oplus (P_2 \otimes_R K_1) \oplus (K_1 \otimes_R K_2)$.

**Exemplo 2.2.11** Tem módulos projetivos que não são livres. Seja $\mathbb{Z}_6$, o anel $\mathbb{Z}_6$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre então um módulo projetivo. Obviamente $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Então $\mathbb{Z}_2$ é um somando direto de $\mathbb{Z}_6$. Agora pela Proposição 2.2.9 o módulo $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo. Mas $\mathbb{Z}_2$ não é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre. Se for, $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6^I$, onde $I$ é algum conjunto de índices, mas isto é impossível pois $\mathbb{Z}_6$ tem 6 elementos.

## 2.3 Módulos planos

**Definição 2.3.1** Um $R$-módulo $X$ é **plano**, se a sequência de $R$-módulos

$$0 \to M_1 \otimes_R X \to M \otimes_R X \to M_2 \otimes_R X$$

é exata, sempre que $0 \to M_1 \to M \to M_2$ é uma sequência exata de $R$-módulos (ou seja, $X$ é um $R$-módulo plano se o funtor $\bullet \otimes_R X$ é exato à esquerda).

Seja $M$ um $R$-módulo. Então o $R$-módulo $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ é chamando de *módulo traço* de $M$. A $R$-estrutura de $M^+$ é dado por $R \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, definida por $(a, f(x)) = f(ax)$, para todo $x \in M$ e $a \in R$.

⟨plano0⟩ **Proposição 2.3.2** Um $R$-módulo $M$ é plano se, e somente se, $M^+$ é um $R$-módulo injetivo.

*Demonstração.* Suponhamos que $M$ é um $R$-módulo plano. Para demonstrar que $M^+$ é $R$-módulo injetivo, é suficiente, pelo Corolário 2.1.4, demonstrar que $\mathrm{Hom}_R(-, M^+)$ é exato como $R$-módulo. Seja $f : N_1 \to N_2$ um homomorfismo injetivo de $R$-módulos e considere

$$\mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \to \mathrm{Hom}_R(N_1, M^+).$$

De acordo a Fórmula de Adjunção

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \\ {\scriptstyle (Id_M \otimes f)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \end{array}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são isomorfismos. Como $M$ é $R$-módulo plano, a sequência

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N_1 \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_R N_2$$

é exata e como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$ módulo injetivo, $(Id_M \otimes f)^*$ é um homomorfismo sobrejetivo. Segue, $f^*$ é também sobrejetivo, então $M^+$ é $R$-módulo injetivo. A reciproca é direta pelo diagrama acima. ■

Temos algumas propriedades, elementares.

⟨observação2⟩ **Observação 2.3.3**

1. Se $\{M_i\}_{i \in I}$ é uma família de $R$-módulos, então $\oplus_{i \in I} M_i$ é plana se, e somente se cada $M_i$ é plano para cada $i \in I$. Use a Proposição 2.3.2.
2. Se dois $R$-módulos são isomorfos e um deles é plano, então ambos são planos.
3. Observe que se

   $$0 \to M \to N$$

   é uma sequência exata de $R$-módulos, então

   $$0 \to R \otimes_R M \to R \otimes_R N$$

   é exata pelo fato que $R \otimes_R M \cong M$ e $R \otimes_R N \cong N$. Portanto, com isto se mostra que $R$ é um $R$-modulo plano.

⟨item3⟩ 4. Qualquer $R$-módulo livre é plano. De fato. Como qualquer $R$-módulo livre é isomorfo a $R^I$ para algum conjunto de indices $I$. como $R^I$ é soma de $R$-moulos planos, então $R^I$ é plano pelo item 1.

5. Qualquer $R$-módulo projetivo é plano. De fato, seja $M$ um $R$-módulo projetivo. Então pela Proposição 2.2.9 temos que $R^I = M \oplus N$, para algum $R$-módulo $N$, agora pelo item 4 e item 1, temos que $M$ é plano.

Com os resultados anteriores, concluimos que: Se $M$ um $R$-módulo qualquer, então temos as seguintes implicações:

$$M \text{ é livre} \Rightarrow M \text{ é projetivo} \Rightarrow M \text{ é plano.}$$

Nem todo módulo projetivo é livre. O anel $\mathbb{Z}_6$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre e então é $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo. Alem disso, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, então $\mathbb{Z}_2$ é isomorfo a um somando de $\mathbb{Z}_6$ e então é um $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo. Mas, se $\mathbb{Z}_2$ for um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre, então $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6^I$ para algum conjunto $I$. Agora se $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre, então $\mathbb{Z}_2$ deveria ter no minimo 6 elementos, o qual é uma contradição. Mostre que um módulo plano nem sempre é projetivo.

### 2.3.1 Exercícios

⟨ExercicioPLano⟩

1. Seja $R$ um anel comutativo. Seja $M$ um módulo $R$ e seja $\phi : R \to B$ um homomorfismo plano de anéis comutativos.
   (a) Se $M$ é projetivo como um $R$-módulo, então $B \otimes_R M$ é projetivo como um $B$-módulo.
   (b) Mostre que o contrário da parte $(a)$ falha em geral.
   (c) Prove que se $M$ é um $R$-módulo projetivo, então a localização $S^{-1}M$ é um módulo $S^{-1}R$ projetivo para cada subconjunto multiplicativamente fechado $S$ de $R$.
   (d) Suponha que $M$ é finitamente apresentado. Prove que as seguintes condições são equivalentes:
      i. $M$ é um $R$-módulo projetivo;
      ii. a localização $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$-módulo projetivo para cada subconjunto multiplicativamente fechado $S$ de $R$;
      iii. a localização $M_\mathfrak{p}$ é um $R_\mathfrak{p}$-módulo projetivo para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$;
      iv. a localização $M_\mathfrak{m}$ é um $R_\mathfrak{p}$-módulo projetivo para cada ideal máximal $\mathfrak{m}$ de $R$.
2. Suponha que $M$ é um $R$-módulo onde $R$ é um anel Noetheriano. Prove que as seguintes condições são equivalentes:
   (a) $M$ é um $R$-módulo injetivo;
   (b) a localização $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$-módulo injetivo para cada subconjunto multiplicativamente fechado $S$ de $R$;
   (c) a localização $M_\mathfrak{p}$ é um $R_\mathfrak{p}$-módulo injetivo para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$;
   (d) a localização $M_\mathfrak{m}$ é um $R_\mathfrak{m}$-módulo injetivo para cada ideal máximal $\mathfrak{m}$ de $R$.
3. Suponha que $M$ é um $R$-módulo. Prove que as seguintes condições são equivalentes:
   (a) $M$ é um $R$-módulo plano;
   (b) a localização $S^{-1}M$ é um módulo $S^{-1}R$-plano para cada subconjunto multiplicativamente fechado $S$ de $R$;
   (c) a localização $M_\mathfrak{p}$ é um $R_\mathfrak{p}$-módulo plano para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$;
   (d) a localização $M_\mathfrak{m}$ é um $R_\mathfrak{m}$-módulo plano para cada ideal máximal $\mathfrak{m}$ de $R$.

4. Mostre que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível. Mais geralmente, se $R$ é um domínio, seu corpo de frações $\mathrm{Frac}(R)$ é divisível.
5. Uma soma direta de uma família de $R$-módulos, é um $R$-módulo injetivo se, e somente se, cada um dos somandos é um $R$-módulo injetivo.
6. Todo $R$-módulo injetivo pode ser expressado como uma soma direta de $R$-módulos injetivos indecomponíveis.
7. Mostre que qualquer $R$-módulo $M$ é imagem homeomorfica de um $R$-módulo livre. Alem disso, se $M$ é finitamente gerado, então o $R$-módulo livre pode ser escolhido com um $R$-módulo finitamente gerado.
8. Mostre que, se um $R$-módulo $M$ é livre então $M$ é um $R$-módulo projetivo.
9. Um $R$-módulo $I$ é injetivo se, e somente se para cada sequência exata $0 \to M \xrightarrow{f} N$ de $R$-módulos e $R$-homomorfismos a sequência $0 \to \mathrm{Hom}_R(N,I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M,I)$ é exata como $R$-módulos.
10. Um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se para cada sequência exata $M \xrightarrow{g} N \to$ de $R$-módulos e $R$-homomorfismos a sequência $\mathrm{Hom}_R(P,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,N) \to$ é exata como $R$-módulos.
11. Se $\{M_i\}_i$ é uma família de $R$-módulos, então o $R$-módulo $\prod_i M_i$ é injetivo se, e somente se, cada $M_i$ é injetivo.
12. Se $\{M_i\}_i$ é uma família de $R$-módulos, então o $R$-módulo $\bigoplus_i M_i$ é projetivo se, e somente se, cada $M_i$ é projetivo.
13. Um $R$-módulo $M$ é projetivo se, e somente se, é isomorfor a um somando direto de um $R$-módulo livre. Dica $R^I \cong M \oplus \mathrm{Ker}(f : R^I \to M)$.
14. Prove que um $R$-módulo injetivo é divisível.
15. Mostre que nem todo módulo plano é um módulo projetivo.
16. Se $R$ é um domínio de ideais principais, prove que um $R$-módulo $M$ é divisível, se e somente se, $M$ é um $R$-módulo injetivo.

?⟨exer8⟩?

17. Seja $0 \to M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \to 0$ uma sequência exata de $R$-módulos. Se $M_2$ é um $R$-módulo projetivo, prove que $0 \to X \otimes_R M_1 \longrightarrow X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R M_2 \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos para qualquer $R$-módulo $X$.

⟨commutahomo⟩

18. Seja $R$ um anel comutativo. Seja $M_\bullet$ um complexo de $R$-módulos, e $N$ um $R$-módulo.
    (a) se $N$ é plano, mostre que $H_i(M_\bullet \otimes_R N) \cong H_i(M_\bullet) \otimes_R N$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
    (b) se $N$ é projetivo, mostre que $H_i(\mathrm{Hom}_R(M_\bullet, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_i(M_\bullet), N)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
    (c) se $N$ é injetivo, mostre que $H_i(N, \mathrm{Hom}_R(M_\bullet)) \cong \mathrm{Hom}_R(N, H_i(M_\bullet))$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

## 2.4 Resoluções projetiva e injetiva

Sabemos que cada módulo é a imagem homomórfica de um módulo projetivo, e que cada módulo pode ser megulhado em um módulo injetivo. Estas observações nos fornecem as ferramentas necessárias para construir resoluções projetivas e injetivas, que desempenham um papel central na álgebra comutativa e na teoria da funtores derivados.

A seguir, estudaremos funtores derivados à direita e funtores derivados à esquerda de um funtor aditivo e covariante, ou de um funtor aditivo e contravariante. Para este fim, faremos uma introdução sobre os conceitos de resolução injetiva e resolução projetiva de um dado $R$-módulo.

⟨Rprojetiva⟩ **Definição 2.4.1** Seja $M$ um $R$-módulo qualquer. A sequência exata da forma:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é denominada uma **resolução projetiva** de $M$ se $P_i$ é um $R$-módulo projetivo para cada $i = 0,1,2,3,\ldots$.

Observe que na Definição 2.4.1, se retirarmos o $R$-módulo $M$, obteremos um complexo

$$\mathbf{P}_{\bullet,M} : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow 0$$

e à este complexo de cadeias vamos nos referir como sendo a **resolução projetiva deletada** do $R$-módulo $M$.

A resolução injetiva pode ser definida de forma semelhante.

?⟨Rinjetiva⟩? **Definição 2.4.2** Seja $M$ um $R$-módulo qualquer. A sequência exata da forma:

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

é chamada de **resolução injetiva** de $M$, se $I^i$ é um $R$-módulo injetivo para cada $i = 0,1,2,3,\ldots$.

De forma análoga ao feito anteriormente, se removemos o $R$-módulo $M$ da sequência $\mathbf{I}^\bullet$, obteremos o co-complexo de $R$-módulos

$$\mathbf{I}^{\bullet,M} : 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \cdots$$

e à este cocomplexo, chamaremos de **resolução injetiva deletada** do $R$-módulo $M$.

Agora, o seguinte lema é muito importante pois nos garante a existência de resoluções injetivas e projetivas de um $R$-módulo qualquer $M$.

?⟨existenciaR⟩? **Lema 2.4.3** Todo $R$-módulo $M$ possui uma resolução injetiva e projetiva.

*Demonstração.* Se $M$ é um $R$-módulo, então pelo Corolário 2.2.8, sabemos que existe um $P_0$ módulo projetivo e um epimorfismo $\alpha_0 : P_o \to M$. Portanto temos sequência exata

$$0 \to K_0 \xrightarrow{p_0} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$$

onde $K_0 = \mathrm{Ker}(\alpha_0)$ e $p_0$ é injeção canônica. Continuando este processo, existirão sequências extas de $R$-módulos e homomorfismos

$$0 \to K_0 \xrightarrow{p_0} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$$

$$0 \to K_1 \xrightarrow{p_1} P_1 \xrightarrow{\beta_1} K_0 \to 0$$

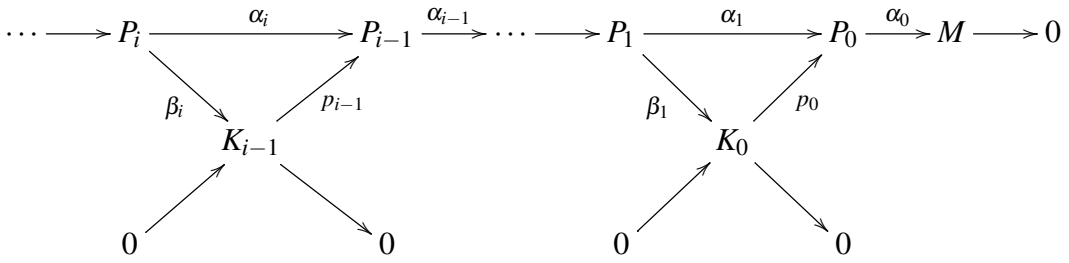
$$0 \to K_2 \xrightarrow{p_2} P_2 \xrightarrow{\beta_2} K_1 \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to K_i \xrightarrow{p_i} P_i \xrightarrow{\beta_i} K_{i-1} \to 0$$

$$\vdots$$

onde $P_i$ é projetivo, $K_i = \mathrm{Ker}(\beta_i)$ e $p_i$ é uma injeção canônica, para $i = 0,1,2,\ldots$, com $\beta_0 = \alpha_0$. Se emendassemos estas sequências exatas curtas, teríamos o seguinte diagrama




onde $\alpha_i = p_{i-1} \circ \beta_i$ para $i = 1,2,3,\ldots$, então, desta igualdade temos,

$$\mathrm{Im}(\alpha_i) = \mathrm{Im}(\beta_i) = K_{i-1} = \mathrm{Ker}(\beta_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$$

para $i = 1,2,3,\ldots$ e

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $M$.

Para o caso de injetividade, faremos a prova por indução sobre $i$.

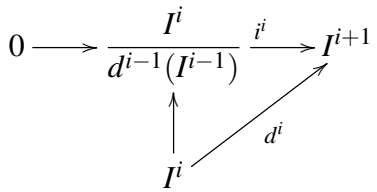
Nos sabemos pela Proposição 2.1.12 existe uma aplicação injetivo e um $R$-módulo injetivo $I^0$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi_M} I^0$$

Considere uma aplicação quociente $p^0 : I^0 \to \mathrm{Coker}(\psi_M)$ e seja $I^1$ um $R$-módulo injetivo e um homomorfismo injetivo $i^0 : \mathrm{Coker}(\psi_M) \to I^1$. Seja $d^0 = i^0 \circ p^0$. Então nos conseguimos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi_M} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1.$$

Agora suponhamos que tenhamos escolhido $I^0, I^1, \ldots, I^i$ e $d^0, d^1, \ldots, d^{i-1}$. Como antes, considere $p^i : I^i \to \mathrm{Coker}(d^{i-1})$. Seja $I^{i+1}$ um $R$-módulo injetivo e um homomorfismo $i^i$ injetivo $\dfrac{I^i}{d^{i-1}(I^{i-1})}$ em $I^{i+1}$. Como antes definamos $d^i = i^i \circ p^i$, isto é




Claramente, como $i^i$ é injetiva $\ker d^i = \ker p^i = \mathrm{im}(d^{i-1})$, e assim $\ker d^i = \mathrm{Im} d^{i-1}$. Tudo isto nos dá uma sequência exata

$$\mathbf{I}^\bullet : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi_M} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

■

Observe que, se

$$\mathbf{P}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $M$, então

$$\mathbf{P}_{\bullet,M} : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow 0$$

e

$$H_0(\mathbf{P}_{\bullet,M}) = \mathrm{Ker}(P_0 \to 0)/\mathrm{Im}(\alpha_1) = P_0/\mathrm{Ker}(\alpha_0) \cong M.$$

Similarmente, se

$$\mathbf{I}^\bullet : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

uma resolução injetiva de $M$, então

$$\mathbf{I}^{\bullet,M} : \ 0 \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

$H^0(\mathbf{I}^{\bullet,M}) \cong M$. Assim, isto significa que mesmo calculando cohomologias ou homologias, não perdemos nenhuma informação de $M$, a menos de isomorfismo, quando tiramos $M$ das resoluções.

**Exemplo 2.4.4** Neste exemplo faremos um processo de como calcular um resolução projetiva: Seja $R = k[x,y,z]$ e seja $I = (x,y,z)$ um ideal. Suponha que queiramos criar uma sequência exata com os mapas

$$R \to R/I \to 0.$$

Bem, a resposta natural poderia ser

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0.$$

Isto é claro, correto, mas agora podemos continuar o prcesso feito acima, exigindo que cada módulo que aparece seja da forma $R^n$ para algum $n$. Observamos o seguinte: Como $I = (x,y,z)$ existe um mapa $\alpha_0 : R^3 \to I$ (sobrejetivo) definida por

$$(a,b,c) \to ax + by + cz.$$

agora construindo a sequência exata

$$0 \to K_0 \xrightarrow{p_0} R^3 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$$

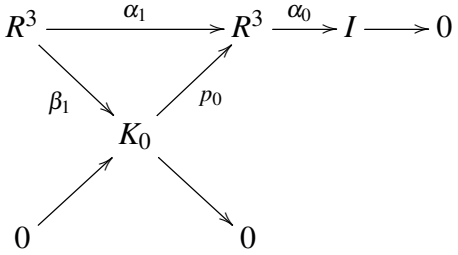
onde $K_0 = \mathrm{Ker}(\alpha_0)$. Então, para continuar, tentaremos fazer a mesma coisa que fizemos antes. Mas primeiro devemos computar $\mathrm{Ker}(\alpha_0)$. Observe que, em termos de uma matriz temos que

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = 0,$$

e, na verdade, esses elementos geram $K_0$, então temos

$$K_0 = \left[ \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \right] = [v_1, v_2, v_3].$$

Como antes, temos um mapa $\beta_1 : R^3 \to K_0$ definido por $(a,b,c) \to av_1 + bv_2 + cv_3$. Com isto podemos construir e seguinte diagram comutativo




onde $p_0$ é a aplicação inclusão e $\alpha_1 = p_0 \circ \beta_1$.

Assim, como antes, podemos calcular o nocleo desta apliação. Com isto podemos facilmente ver que $\mathrm{Ker}(\alpha_0) = \mathrm{Im}(\alpha_1)$.

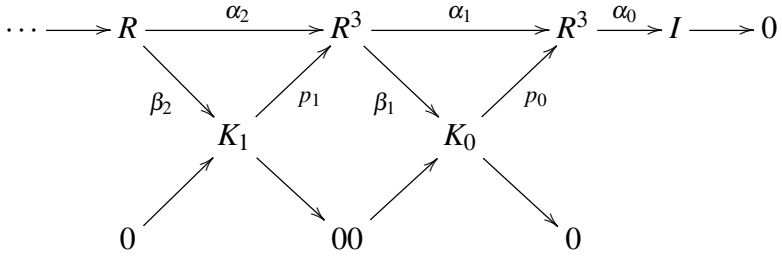
Como antes, agora calculemos o nucleo de $\beta_1$. Pelo diagrama, como o nucleo de $\alpha_1$ é igual a nucleo de $\beta_1$ e como a forma matricial de $\alpha_1$ é

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}.$$

Nos agora podemos calcular o nucleo esta apliação, e vemos que que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} = 0.$$

Com isto podemos construir $K_1 = \left[ \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} \right] = [v_1]$. Como antes definamos $\beta_2 : R \to K_1$, $\beta_2(a) = av_1$. Agora com isto temos o seguinte diagrama.




onde $p_1$ é inclusão e $\alpha_2 = p_1 \circ \beta_2$. Como antes, agora calculemos o nucleo de $\beta_2$. Pelo diagrama, como o nucleo de $\alpha_2$ é igual a nucleo de $\beta_2$ e como a forma matricial de $\alpha_2$ é

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

portanto o nucleo de $\alpha_2$ é zero. Assim, obtemos a resolução

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{(x\,y\,z)} R \longrightarrow R/I \to 0.$$

O próximo exemplo, mostra que podem existir resoluções projetivas infinitas.

**Exemplo 2.4.5** Seja $R = k[x]/(x^2)$. Então, se $\overline{x}$ representa a imagem de $x$ em $R$, isto é, $\overline{x} = x + (x^2)$, então seja $M = R/(\overline{x})$ um $R$-módulo. Então uma resolução livre de $M$ é

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha_i} R \longrightarrow \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha_1} R \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

onde cada mapa é multiplicação por $x$. Verifiquemos que é exato: Primeiro o anel $R$ pode ser identificado com o conjunto de todos $a+bx$ onde $a,b \in k$. Então $x(a+bx) = xa$. Então a imagem deste mapa é toda múltipla de $x$, e o nucleo do mapa também é todos os múltiplos de $x$. A exatidão segue imediatamente, notando que o último mapa é uma projeção e, portanto, é sobrejetivo.

**Exemplo 2.4.6** Seja $\mathbb{Z}_2$ um $\mathbb{Z}_4$-módulo e seja a sequência de $\mathbb{Z}_4$-módulos, denotado por

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0\,,$$

onde $\alpha_i(\overline{n}) = \overline{2n}$ para cada $i \geq 0$ e $\alpha_0(\overline{n}) = \overline{n}$. Nos podemos ver facilmente que esta sequência é uma uma resolução projetiva infinita de $\mathbb{Z}_2$.

A seguir será mostrado que quaisquer duas resoluções projetivas de um módulo são do mesmo tipo de homotopia. Para isso, precisamos dos dois lemas seguintes.

**Lema 2.4.7** (**Teorema de Comparação**) Seja
⟨lema1⟩

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de $M$ e suponha que

$$\mathbf{Q}_\bullet : \cdots \longrightarrow N_i \xrightarrow{\beta_i} N_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\beta_1} N_0 \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0$$

é um complexo exata. Então para qualquer homomorfismo $f : M \to N$ de $R$-módulos existe uma aplicação de complexos $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ tal que $\beta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \alpha_i$, para todo $i = 0,1,2,\ldots$.

*Demonstração.* Como $P_0$ é projetivo e como temos um $R$-homomorfismo $f \circ \alpha_0 : P_0 \to N$, então pelo fato que $\beta_0$ um $R$-homomorfismo sobrejetivo, temos que existe um $R$-homomorfismo $f_0 : P_0 \to N_0$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

comuta. Agora suponhamos que os $R$-homomorfismos $f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}$ tem sido encontrados tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{\alpha_i} & P_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & P_{i-2} & \xrightarrow{\alpha_{i-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-2}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_i & \xrightarrow{\beta_i} & N_{i-1} & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & N_{i-2} & \xrightarrow{\beta_{i-2}} \cdots \xrightarrow{\beta_1} & N_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

é comutativo. Com isto encontraremos $f_i : P_i \to N_i$ tal que $\beta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \alpha_i$. pelo processo de indução e pelo último diagrama, $\beta_{i-1} \circ f_{i-1} = f_{i-2} \circ \alpha_{i-1}$, então $\beta_{i-1} \circ f_{i-1}\alpha_i = f_{i-2} \circ \alpha_{i-2} \circ \alpha_i = 0$ da $\mathrm{Im}(f_{i-1} \circ \alpha_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_{i-1}) = \mathrm{Im}(\beta_i)$. Como $P_i$ é projetivo, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_n & & \\
 & \swarrow^{f_i} & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}\circ\alpha_i} & & \\
N_n & \xrightarrow{\beta_i} & \mathrm{Im}(\beta_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

que pode ser completado comutativamente pelo $R$-homomorfismo $f_i : P_i \to N_i$.

■

A aplicação de complexos, $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$, obtida no lema anterior, será chamada uma **aplicação de complexos gerado** por $f : M \to N$. O lema anterior não assegura que tal aplicação de complexos é única. Não entanto, temos o seguinte lema.

⟨lema2.1⟩ **Lema 2.4.8** Seja $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ como no lema 2.4.7. Se $f : M \to N$ é um homomorfismo de $R$-módulos, então qualquer par de aplicações de complexos $f_\bullet, g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ gerado por $f$ são homotópicos.

?⟨prposicao1125⟩? **Proposição 2.4.9** Se $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$são duas resoluções projetivas de $M$, então $\mathbf{P}_{\bullet,M}$ e $\mathbf{Q}_{\bullet,M}$ tem o mesmo tipo de homotopia.

Os resultados acima podem ser feitos para o dual, isto é, para resoluções injetivas e são deixados como exercícios para o leitor.

### 2.4.1 Funtores derivados

Em álgebra comutativa ou na álgebra homológica, certos funtores podem ser obtidos ou derivados a partir de outros que são estreitamente relacionados com os funtores originais.

Nesta seção, faremos uma breve descrição de funtores derivados à esquerda e funtores derivados à direita. Observe que, se temos

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

sendo uma resolução projetiva de $M$, e $\mathfrak{F} : \mathbf{M}_R \to \mathbf{M}_S$ um funtor covariante de $R$-módulos para $S$-módulos, então $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet)$

$$\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_i) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_i)} \mathfrak{F}(P_{i-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0$$

denotara um complexo de $S$-módulos e de $S$-homomorfismos. Se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo covariante, então temos que

$$\mathfrak{F}(\alpha_i) \circ \mathfrak{F}(\alpha_{i+1}) \equiv 0,$$

e por conseguinte $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet)$ é um complexo de $S$-módulos. Observe que, dependendo de como é $\mathfrak{F}$, o complexo $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet)$ pode não ser uma sequência exata de $R$-módulos e cada $S$-módulo $\mathfrak{F}(P_i)$ pode não ser um $S$-módulo projetivo.

Estas mesmas construções e observações podem ser feitas para $\mathfrak{F}(\mathbf{I}^\bullet)$, onde $\mathbf{I}^\bullet$ é uma resolução injetiva de $M$.

Sejam $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ resoluções projetivas de $M$ e $N$ respectivamente, e $f : M \to N$ um homomorfismo de $R$-módulos. Então pelo Lema 2.4.7, existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbf{P}_\bullet : \cdots & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{\alpha_i} & P_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & P_{i-2} & \xrightarrow{\alpha_{i-2}} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-2}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathbf{Q}_\bullet : \cdots & \longrightarrow & Q_i & \xrightarrow{\beta_i} & Q_{i-1} & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & Q_{i-2} & \xrightarrow{\beta_{i-2}} & \cdots & \xrightarrow{\beta_1} & Q_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

onde $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ uma família de $R$-homomorfismos gerado por $f$. Agora, se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo de $R$-módulos para $S$-módulos, então conseguimos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M}) : \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{F}(P_i) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_i)} & \mathfrak{F}(P_{i-1}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_{i-1})} & \mathfrak{F}(P_{i-2}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_{i-2})} & \cdots & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} & \mathfrak{F}(P_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(f_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(f_{i-1})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(f_{i-2})} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(f_0)} & & \\
\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,N}) : \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{F}(Q_i) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\beta_i)} & \mathfrak{F}(N_{i-1}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\beta_{i-1})} & \mathfrak{F}(Q_{i-2}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\beta_{i-2})} & \cdots & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\beta_1)} & \mathfrak{F}(Q_0) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde as linhas do diagrama são complexos. Portanto, existe uma família de aplicações, pela Proposição 1.4.3, $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$ que aplica a $i$-ésima homologia de $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})$ para a $i$-ésima homologia de $\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,N})$. Se $\mathfrak{F}$ for funtor aditivo contravariante, então existirá uma família de aplicações de cohomologia em cohomologia.

A seguir, apresentamos uma proposição importante para a sequência do texto.

⟨estavelecer⟩ **Proposição 2.4.10** Seja $\mathfrak{F}$ um funtor aditivo de $R$-módulos para $S$-módulos.

(a). Se $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ são duas resoluções projetivas do $R$-módulo $M$, então $\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \cong \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,M}))$, para todo $i \geq 0$. Além disso, se $f : M \to N$ é um homomorfismo de $R$-módulos, e $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ são resoluções projetivas de $M$ e $N$ respeitivamente, então $\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \to \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,N}))$, para todo $i \geq 0$, independe da escolha da aplicação de complexos $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{Q}_\bullet$ que é gerada por $f$.

(b). Se $\mathbf{I}^\bullet$ e $\mathbf{J}^\bullet$ são duas resoluções injetivas do mesmo $R$-módulo $M$, então $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})) \cong \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{J}^{\bullet,M}))$, para todo $i \geq 0$. Além disso, se $f : M \to N$ é um homomorfismo de $R$-módulos e $\mathbf{I}^\bullet$ e $\mathbf{J}^\bullet$ são resoluções injetivas de $M$ e $N$ respeitivamente, então $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f^{\bullet,M})) : \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})) \to \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,N}))$, para todo $i \geq 0$, independe da escolha da aplicações de complexos $f^\bullet : \mathbf{I}^\bullet \to \mathbf{J}^\bullet$ que é gerada por $f$.

*Demonstração.* (1) Se $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ são duas resoluções projetivas do mesmo $R$-módulo $M$ e se a aplicação identidade $id_M : M \to M$ gera duas aplicações de complexos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,M}$ e $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet,M} \to \mathbf{P}_{\bullet,M}$, então pelo Lema 2.4.8, temos que $f_\bullet \circ g_\bullet$ e $g_\bullet \circ f_\bullet$ são homotópicos para a cadeia de aplicações $\mathbf{Id}_{Q_{\bullet,M}}$ e $\mathbf{Id}_{P_{\bullet,M}}$ respeitivamente. Agora segue da Observação 1.4.5 item 4,(c) que $\mathfrak{F}(f_\bullet \circ g_\bullet)$ e $\mathfrak{F}(g_\bullet \circ f_\bullet)$ são homotópicos para $\mathfrak{F}(\mathbf{Id}_{Q_{\bullet,M}}) = \mathbf{Id}_{\mathfrak{F}(Q_{\bullet,M})}$ $\mathfrak{F}(\mathbf{Id}_{P_{\bullet,M}}) = \mathbf{Id}_{\mathfrak{F}(P_{\bullet,M})}$ respeitivamente. Aplicando a Observação 1.4.5 item 4,(d) e usando as propriedades de $H_n$ e $\mathfrak{F}$, temos

$$\begin{aligned} H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) \circ H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet) \circ \mathfrak{F}(f_\bullet)) \\ &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet \circ f_\bullet) \\ &= H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{id}_{P_{\bullet,M}}) \\ &= H_i(\mathbf{id}_{\mathfrak{F}(P_{\bullet,M})}) \\ &= H_i(\mathbf{id}_{\mathfrak{F}(P_{\bullet,M})}) \\ &= \mathbf{id}_{H_i(\mathfrak{F}(P_{\bullet,M}))} \end{aligned}$$

Similarmente, $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) \circ H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet])) = \mathbf{id}_{H_i(\mathfrak{F}(Q_{\bullet,M}))}$, então

$$H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(P_{\bullet,M})) \to H_i(\mathfrak{F}(Q_{\bullet,M}))$$

é um isomorfismo.

Para finalizar, suponhamos que $f_\bullet, g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ são duas aplicações de complexos gerado por $f : M \to N$. Então $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas, pela Lema 2.4.8, então temos que $\mathfrak{F}(f_\bullet), \mathfrak{F}(\mathbf{g}) : \mathfrak{F}(P_{\bullet,M}) \to \mathfrak{F}(Q_{\bullet,M})$ são também homotópicas, pela Observação 1.4.5 item 4 (c). Agora segue, da 1.4.5 item 4 (d),

$$H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(P_{\bullet,M})) \to H_i(\mathfrak{F}(Q_{\bullet,N})).$$

A prova de $(2)$ é similar e se deixa como exercício.

■

Com esta proposição em mãos, podemos estabelecer os funtores derivados à esquerda e também à direita; a seguir, desenvolveremos estes funtores para um funtor aditivo $\mathfrak{F}$.

1. **O Funtor $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(\bullet) : M_R \to M_S$.** Escolhemos uma resolução projetiva do $R$-módulo $M$:

   $$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

   e então

   $$\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_i) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_i)} \mathfrak{F}(P_{i-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0$$

   é um complexo de $S$-módulos (note que o funtor $\mathfrak{F}$, neste caso, é covariante). Com isto, definimos os $S$-módulos de homologia $\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M}))$, e denotemos isto como

   $$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) := \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})).$$

   Para cada $R$-homomorfismo $f : M \to N$, temos uma aplicação de $S$-módulos de homologia no nível $i$

   $$\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \to \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,N}))$$

   onde $\mathbf{Q}_\bullet$ é uma resolução projetiva do $R$-módulo $N$ e $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ é uma aplicação de complexos gerado por $f$. Pela Proposição 2.4.10 $(a)$, temos que $\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$ depende somente de $f$ e não da aplicação de complexos $f_\bullet$ que é gerada por $f$. Se denotarmos $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f) := \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$, então temos que

   $$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(N)$$

   é um funtor aditivo (e covariante, pois, neste caso, $\mathfrak{F}$ está sendo considerado um funtor covariante) de $R$-módulos para $S$-módulos, para cada inteiro $i \geq 0$.

2. **O Funtor** $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(\bullet) : M_R \to M_S$. Escolhemos uma resolução injetiva do $R$-módulo $M$:

$$\mathbf{I}^\bullet : \ 0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \longrightarrow I^i \longrightarrow \cdots$$

e então temos que

$$\mathfrak{F}(\mathbf{I}^\bullet) : \ 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(I^0) \longrightarrow \mathfrak{F}(I^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(I^{i-1}) \longrightarrow \mathfrak{F}(I^i) \longrightarrow \cdots$$

é um co-complexo de $S$-módulos (observe que $\mathfrak{F}$ é covariante). Com isto, definimos os módulos de cohomologia $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M}))$, e denotemos isto como

$$\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) := \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})).$$

Para cada $R$-homomorfismo $f : M \to N$ temos uma aplicação de $S$-módulos de Cohomologia no nível $i$

$$\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})) \to \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{J}^{\bullet,N}))$$

onde $\mathbf{J}^\bullet$ é uma resolução injetiva do $R$-módulo $M$ e $f_\bullet : \mathbf{I}^{\bullet,M} \to \mathbf{J}^{\bullet,N}$ é uma aplicação de co-complexos gerada por $f$. Pela Proposição 2.4.10 $(b)$, temos que $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$ depende somente de $f$ e não da aplicação $f_\bullet$ de complexos de cadeias que é gerada por $f$, como já explicado anteriormente. Denotaremos $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f) := \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$, então temos que

$$\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(N),$$

é um funtor aditivo (e covariante, pois $\mathfrak{F}$ é covariante) de $R$-módulos para $S$-módulos, para cada inteiro $i \geq 0$.

**Definição 2.4.11** Se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo de $R$-módulos para $S$-módulos, então $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ são chamados o $i$-**ésimo funtor derivado à esquerda** de $\mathfrak{F}$ e o $i$-**ésimo funtor derivado à direita** de $\mathfrak{F}$, respectivamente, para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Observe que, se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo e contravariante de $R$-módulos para $S$-módulos, também existem os funtores $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$. Neste caso, para construir o funtor $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ é suficiente escolher uma resolução injetiva, e para construir $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ é suficiente escolher uma resolução projetiva.

Frequentemente, usaremos o seguinte resultado: "Se $\mathfrak{F}$ é um funtor aditivo e exato à esquerda ou exato à direita, então $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são naturalmente equivalentes."

Similarmente, temos este resultado para $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$. Antes disso vamos a definir uma especie de equivalência de dois funtores.

**Definição 2.4.12** Sejam $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : M_R \to M_S$ dois funtores e suponha que para cada $M \in M_R$ existe um homomorfismo $\eta_M : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{G}(M)$ em $M_s$ tal que para cada $R$-homomorfismo $f : M \to N$ o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(M) & \xrightarrow{\eta_M} & \mathfrak{G}(M) \\ {\scriptstyle \mathfrak{F}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{G}(f)} \\ \mathfrak{F}(N) & \xrightarrow{\eta_N} & \mathfrak{G}(N) \end{array}$$

é comutativo. A classe de homomorfismos $\eta = \{\eta_M : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{G}(M)\}$ no $M_R$ é chamado de **transformação natural** de $\mathfrak{F}$ para $\mathfrak{G}$. Se $\eta_M$ é um isomorfismo em $M_s$ para cada $M \in M_R$, então $\eta$ é chamado de **isomorfismo natural ou naturalmente equivalentes** de $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, denotado $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}$

⟨ANULA⟩ **Proposição 2.4.13** Seja $\mathfrak{F}$ um funtor aditivo covariante de $R$-módulos. Então:

(a). Se $\mathfrak{F}$ é exato à direita, então $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada $R$-módulo $M$. Além disso, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são funtores naturalmente equivalentes. Se $M$ é um $R$-módulo projetivo, então $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$.

(b). Se $\mathfrak{F}$ é exato à izquerda, então $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada $R$-módulo $M$. Além disso, $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são funtores naturalmente equivalentes. Se $M$ é um $R$-módulo injetivo, então $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$.

*Demonstração.* A seguir, provaremos somente o item $(a)$; a demonstração do item $(b)$ é semelhante.

Se $\mathbf{P}_\bullet$ é uma resolução projetiva do $R$-módulo $M$, então

$$P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

é exata, por definição. Como $\mathfrak{F}$ é exato à direita, temos que

$$\mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata (note que, estamos considerando que $\mathfrak{F}$ é um funtor covariante). Agora, consideremos

$$\mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

e calculemos:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) & = & \mathrm{H}_0(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) & \\ & = & \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(P_0)\to 0)}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_1))} & \\ & = & \frac{\mathfrak{F}(P_0)}{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_0))} & \\ & \cong & \mathfrak{F}(M) & \text{pelo teorema do isomorfismo} \end{array}$$

Com isto, existe um isomorfismo de $S$-módulos $\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$.

Afirmamos que a família $\{\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)\}$ constituída por estes $R$-isomorfismos naturais nos fornece un isomorfismo natural $\eta : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. De fato, seja $f : M \to N$ um homomorfismo de $R$-módulos e suponhamos que $\mathbf{Q}_\bullet$ é uma resolução projetiva do $R$-módulo $N$. Se $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ é uma aplicação de complexos gerada por $f$, então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) & \xrightarrow{\eta_M} & \mathfrak{F}(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(f)} \\ \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) & \xrightarrow{\eta_N} & \mathfrak{F}(N) \end{array}$$

onde $\eta_M$ e $\eta_N$ são isomorfismos de $R$-módulos. Assim, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são funtores naturalmente equivalentes (isto segue somente pela definição de equivalência natural).

Se $M$ é um $R$-módulo projetivo, então seja:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to 0 \to M \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} M \to 0,$$

uma resolução projetiva de $M$ (observe que como $M$ é um $R$-módulo projetivo, todos os $R$-módulos colocados para trás de $M$ na resolução anterior podem ser considerados como os $R$-módulos nulos). Com isto, temos um complexo de cadeias:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M}): \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0,$$

e conseguimos, portanto, que $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1,2,3,\ldots$. ■

**Observação 2.4.14** Note que na Proposição 2.4.13 pode também ser feita considerando que $\mathfrak{F}$ seja também um funtor contravariante. A seguir enunciaremos tal resultado.

A demonstração da seguinte proposição, é semelhante à demonstração da Proposição 2.4.13. Por isso, apenas vamos enunciar o próximo resultado sem a sua prova.

⟨ANULA1⟩ **Proposição 2.4.15** Seja $\mathfrak{F}$ um funtor aditivo contravariante de $R$-módulos. Então:

(a) Se $\mathfrak{F}$ é exato à esquerda, então $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada $R$-módulo $M$, de modo que $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são funtores naturalmente equivalentes. Se $M$ é um $R$-módulo projetivo, então $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 0,1,2,\ldots$.

(b) Se $\mathfrak{F}$ é exato à direita, então $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada $R$-módulo $M$, de modo que $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ são funtores naturalmente equivalentes. Se $M$ é um $R$-módulo injetivo, então $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 0,1,2,\ldots$.

### 2.4.2 Exercícios

1. Seja $P$ um $R$-módulo projetivo, e seja $\beta : B \to P$ um $R$-homomorfismo sobrejetivo (ou seja, é um epimorfismo). Mostre que $B = \mathrm{Ker}(\beta) \oplus P'$, onde $P' \cong P$.
2. Mostre que, um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se, ele é um somando de um $R$-módulo livre.
3. Mostre agora que, um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se, toda sequência exata da forma:
$$0 \to A \to B \to P \to 0,$$
**cinde**.
4. Se $\{P_k \mid k \in K\}$ é uma família de $R$-módulos projetivos, então $\sum_{k\in K} P_k$ é também um $R$-módulo projetivo.
5. Um complemento de um $R$-módulo projetivo $P$ é um $R$-módulo $Q$ (necessariamente projetivo) com $P \oplus Q$ sendo um $R$-módulo livre. Prove que todo $R$-módulo projetivo finitamente gerado possui um complemento finitamente gerado.
6. Seja $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ como no lema 2.4.7. Se $f : M \to N$ é um homomorfismo de $R$-módulos, então qualquer par de aplicações de complexos $f_\bullet, g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ gerado por $f$ são homotópicos.
7. Se $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ são duas resoluções projetivas (ou injetivas) de $M$, então $\mathbf{P}_{\bullet,M}$ e $\mathbf{Q}_{\bullet,M}$ são do mesmo tipo de homotopia.
8. Prove as seguintes afirmações:
   (a) Seja $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ um funtor aditivo, então os funtores $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{R}_i\mathfrak{F}$ são aditivos.
   (b) Seja $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ um funtor aditivo e contravariante, então os funtores $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{R}_i\mathfrak{F}$ são aditivos.

## 2.5 O funtor $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(-,-)$

Seja $X$ um $R$-módulo fixo. Sabemos que $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é um funtor aditivo, **contravariante** e exato à esquerda na categoria de $R$-módulos e $R$-homomorfismos. Da mesma forma, temos que $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ é um funtor aditivo, **covariante** e exato à esquerda na categoria de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos.

### 2.5.1 O funtor derivada à direita do $\mathrm{Hom}_R(-,M)$

Seja

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

uma resolução projetiva do $R$-módulo $M$. Então, para cada $R$-módulo fixo $X$, temos um cocomplexo (ou um cocomplexo)

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,M},X) : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0,X) \xrightarrow{\alpha_1^*} \cdots \xrightarrow{\alpha_i^*} \mathrm{Hom}_R(P_i,X) \xrightarrow{\alpha_{i+1}^*} \cdots .$$

Portanto, agora podemos calcular a $i$-ésima cohomologia do cocomplexo $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,M},X)$, e obteremos os $R$-módulos

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,X) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,M},X)).$$

A seguir, consideremos um homomorfismo de $R$-módulos $f : M \to N$ e uma resolução projetiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de $N$, temos

$$\mathrm{Ext}^i_R(f,X) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,X))$$

onde $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ é uma aplicação de complexos gerado por $f$. Assim, temos

$$\mathrm{Ext}^i_R(f,X) : \ \mathrm{Ext}^i_R(N,X) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,X)$$

e então para cada $i \geq 0$

$$\mathrm{Ext}^i_R(-,X) : \ M_R \to M_R$$

é un funtor aditivo contravariante.

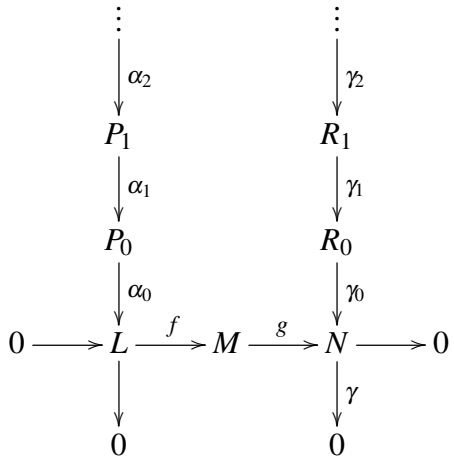
Observe que, pela construção, $\mathrm{Ext}^i_R(-,X) := \mathfrak{R}^i\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é o $i$- ésimo funtor derivado à direita do funtor aditivo contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,M)$, isto também segue que $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$ é aditivo pois $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ e $H^i$ são aditivos.

Observamos também que o $R$-módulo $\mathrm{Ext}^i_R(M,X)$ depende somente dos $R$-módulos $M$ e $X$, e não depende da escolha da resolução projetiva para $M$.

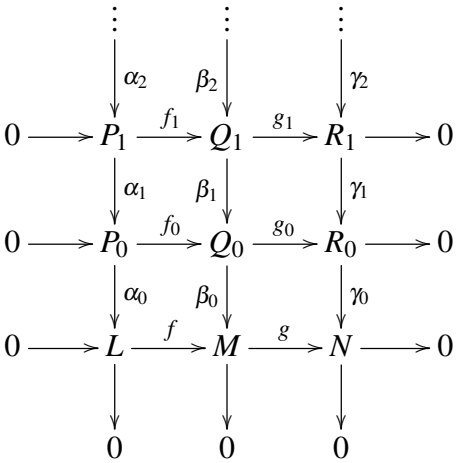
**Definição 2.5.1** O funtor contravariante $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$, é chamado de $i$-**ésimo funtor extensão** de $\mathrm{Hom}_R(-,X)$, ou simplesmente funtor contravariante Ext, para todo $i = 0,1,2,\ldots$.

Para cada sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos, existe uma sequência exata longa para o funtor contravariante $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$. Para obter esta tal sequência, precisamos do seguinte lema chamado “horse shoe" ou “lema da ferradura".

⟨Horse⟩ **Lema 2.5.2** (**Horse Shoe Lemma**) Considere o diagrama, constituído por $R$-módulos e por $R$-homomorfismos:

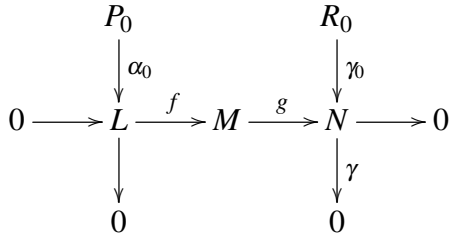


onde a sequência $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é exata e $\mathbf{P_\bullet}$ e $\mathbf{R_\bullet}$ são resoluções projetivas de $L$ e $N$ respectivamente. Então, existe uma resolução projetiva $\mathbf{Q_\bullet}$ de $M$ e aplicações de complexos $f_\bullet : \mathbf{P_\bullet} \to \mathbf{Q_\bullet}$ e $g_\bullet : \mathbf{Q_\bullet} \to \mathbf{R_\bullet}$ tal que:



é um diagrama comutativo e com linhas exatas. Além disso, $Q_i = P_i \oplus R_i$, para cada $i \geq 0$.

*Demonstração.* Provaremos por indução. Considere o diagrama



e seja $Q_0 = P_0 \oplus R_0$. Como $R_0$ é projetivo, existe um $R$-homomorfismo $h : R_0 \to M$ tal que $g \circ h = \gamma_0$. Então sejam $f_0 = i_0 : P_0 \to Q_0$ a injeção canônica e $g_0 = \pi_2 : Q_0 \to R_0$ a

projeção canônica, agora, seja $\beta_0 : Q_0 \to M$ um homomorfismo definido por $\beta_0(x,y) = f \circ \alpha_0(x) + h(y)$.

**Afirmação:** $\beta_0$ é sobrejetiva.

De fato, se $z \in M$, então $g(z) \in N$, logo existe um $y \in R_0$ tal que $\gamma_0(y) = g(z)$. Agora como $g(z - h(y)) = g(z) - (g \circ h)(y) = g(z) - \gamma_0(y) = g(z) = g(z) = 0$, então $z - h(y) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Segue que existe um $x \in P_0$ tal que $f \circ \alpha_0(x) = z - h(y)$. Assim, $\beta_0(x,y) = z$.

Facilmente podemos ver que $0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} Q_0 \xrightarrow{g_0} R_0 \longrightarrow 0$ é exata. Portanto temos o diagrama comutativo e a linha é exata.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{g_0} & R_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Agora suponhamos por indução, que tenhamos construido até $n$-ésima componentes da resolução projetiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de $M$, isto é,

$$0 \longrightarrow Q_{n-1} = P_{n-1} \oplus R_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q = P_0 \oplus R_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0$$

e também tenhamos encontrado os homomorfismos $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ e $g_0.g_1, \ldots, g_{n-1}$ tal que o diagrama comuta e as linhas e colunas são exatas.Na $n$-ésima linha temos o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & P_n & & & & R_n & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p_n^\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle p_n^\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) & \xrightarrow{\overline{f}_{n-1}} & \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) & \xrightarrow{\overline{g}_{n-1}} & \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

com $p_n^\alpha = \alpha_n : P_n \to \mathrm{Im}(\alpha_n) = \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1})$ e $p_n^\gamma = \gamma_n : R_n \to \mathrm{Im}(\gamma_n) = \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1})$ e onde $\overline{f}_{n-1}$ e $\overline{g}_{n-1}$ são restrições de $f_{n-1} : P_{n-1} \to Q_{n-1}$ e $g_{n-1} : Q_{n-1} \to R_{n-1}$ para $\mathrm{Ker}(\alpha_{n-1})$ e $\mathrm{Ker}(\beta_{n-1})$ respectivamente. Uma sobrejeção $p_n^\beta : Q_n = P_n \oplus R_n \to \mathrm{Ker}(\beta_{n-1})$ e as aplicações $0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} Q_n$ e $Q_n \xrightarrow{g_n} R_n \longrightarrow 0$ podem ser construidas exatamente como $\beta_0$, $f_0$ e $g_0$ foram construidos, e obtemos o diagrama comutativo com as linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & Q_n & \xrightarrow{g_n} & R_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p_n^\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle p_n^\beta} & & \downarrow{\scriptstyle p_n^\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) & \xrightarrow{\overline{f}_{n-1}} & \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) & \xrightarrow{\overline{g}_{n-1}} & \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Se $i_{n-1}^\alpha : \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) \to P_{n-1}$, $i_{n-1}^\beta : \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) \to Q_{n-1}$ e $i_{n-1}^\gamma : \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1}) \to R_{n-1}$ são injeções canônicas, então $\alpha_n = i_{n-1}^\alpha \circ p_n^\alpha$, $\beta_n = i_{n-1}^\beta \circ p_n^\beta$ e $\gamma_n = i_{n-1}^\gamma \circ p_n^\gamma$. Com isto temos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & Q_n & \xrightarrow{g_n} & R_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \\
0 & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Q_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & R_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

e então o lema segue por indução. ■

Este lema também existe quando considerarmos resoluções injetivas. Agora, construiremos, pelo resultado, a existência da sequência exata longa do Ext.

⟨SELExt⟩ **Proposição 2.5.3** Se $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos, então para qualquer $R$-módulos $X$, existe uma sequência exata longa de $R$-módulos de cohomologia:

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(L,X) \xrightarrow{\Phi^0} \\
&\xrightarrow{\Phi^0} \mathrm{Ext}_R^1(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(g,X)} \mathrm{Ext}_R^1(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(f,X)} \mathrm{Ext}_R^1(L,X) \xrightarrow{\Phi^1} \cdots \\
&\cdots \xrightarrow{\Phi^{i-1}} \mathrm{Ext}_R^i(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^i(g,X)} \mathrm{Ext}_R^i(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^i(f,X)} \mathrm{Ext}_R^i(L,X) \xrightarrow{\Phi^i} \ldots
\end{aligned}$$

onde $\Phi^i$ é um $R$-homomorfismo conectante para cada $i \geq 0$.

*Demonstração.* Se $\mathbf{P}_\bullet$ and $\mathbf{R}_\bullet$ são resoluções projetivas dos $R$-módulos $L$ e $N$ respectivamente, então pelo **Lema da Ferradura** (Horse Shoe Lemma) conseguimos assegurar que existe uma resolução projetiva $\mathbf{Q}_\bullet$ do $R$-módulo $M$ e aplicações de complexos $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{Q}_\bullet$ e $g_\bullet : \mathbf{Q}_\bullet \to \mathbf{R}_\bullet$ tal que

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{Q}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{R}_\bullet \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de complexos. O complexo $\mathbf{Q}_\bullet$ foi construido pelo Lema da Ferradura (o **Horse Shoe Lemma**),

$$0 \longrightarrow P_i \xrightarrow{f_i} Q_i \xrightarrow{g_i} R_i \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta que cinde, com $Q_i = P_i \oplus R_i$ para cada $i \geq 0$. Pela Proposição 1.3.3 item (a), $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ preserva sequências exatas que cinden, temos com isto o seguinde diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(R_0,X) & \xrightarrow{g_0^*} & \mathrm{Hom}_R(R_1,X) & \xrightarrow{\gamma_2^*} & \mathrm{Hom}_R(R_2,X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle g_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle g_2^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0\oplus R_0,X) & \xrightarrow{\beta_1^*} & \mathrm{Hom}_R(P_1\oplus R_1,X) & \xrightarrow{\beta_2^*} & \mathrm{Hom}_R(P_1\oplus R_2,X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_0^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_2^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0,X) & \xrightarrow{\alpha_1^*} & \mathrm{Hom}_R(P_1,X) & \xrightarrow{\alpha_2^*} & \mathrm{Hom}_R(P_2,X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

onde as colunas são exatas e as linhas nos fornecem $\mathrm{Ext}^i_R(N,X)$, $\mathrm{Ext}^i_R(M,X)$ e $\mathrm{Ext}^i_R(L,X)$, para cada $i \geq 0$. Assim, temos a sequência exata curta de complexos:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}_{\bullet,N},X) \xrightarrow{g_\bullet^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{Q}_{\bullet,M},X) \xrightarrow{f_\bullet^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,L},X) \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Como o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é exato à esquerda e aditivo, pela Proposição 2.4.15 $(b)$, conseguimos obter que:

$$\mathrm{Ext}^0_R(N,X) = H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,N},X)) = \mathrm{Hom}_R(N,X),$$

$$\mathrm{Ext}^0_R(M,X) = H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,M},X)) = \mathrm{Hom}_R(M,X) \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Ext}^0_R(L,X) = H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,L},X)) = \mathrm{Hom}_R(L,X).$$

Assim, juntamente com a Proposição 1.4.9, temos o resultado desejado. ■

A sequência dada na Proposição 2.5.3 é chamada de Ext-**sequência exata longa na primeira variável**. Existe também uma Ext-**sequência exata longa na segunda variável**. Para obter esta última sequência, suponha que $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos. Seja $\mathbf{P}_\bullet$ uma resolução projetiva de $X$, e relembre que se $P$ é um $R$-módulo projetivo, então $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ preserva sequências exatas curtas, ou seja, ele é um funtor exato, pelo Corolário 2.2.3. Assim, para cada $i \geq 0$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i,L) \xrightarrow{f_\star} \mathrm{Hom}_R(P_i,M) \xrightarrow{g_\star} \mathrm{Hom}_R(P_i,N) \longrightarrow 0\,.$$

Portanto, isto nos fornece uma sequência exata curta de cocomplexos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X}, L) \xrightarrow{f_{\bullet\star}} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X}, M) \xrightarrow{g_{\bullet\star}} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X}, N) \longrightarrow 0\,.$$

Agora, tomando $R$-módulos de cohomologia nesta sequência e aplicando as Proposições 1.4.9 e 2.4.15, obtemos a seguinte proposição.

⟨SELExt1⟩ **Proposição 2.5.4** Se $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então para qualquer $R$-módulo dado $X$, existe uma sequência exata longa de $R$-módulos de cohomologia,

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,N) \xrightarrow{\Phi^0} \\
&\xrightarrow{\Phi^0} \mathrm{Ext}^1_R(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X,f)} \mathrm{Ext}^1_R(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X,g)} \mathrm{Ext}^1_R(L,N) \xrightarrow{\Phi^1} \cdots \\
&\cdots \xrightarrow{\Phi^{i-1}} \mathrm{Ext}^i_R(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(X,f)} \mathrm{Ext}^i_R(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(X,g)} \mathrm{Ext}^i_R(X,N) \xrightarrow{\Phi^i} \cdots
\end{aligned}$$

onde $\Phi^i$ é um $R$-homomorfismo conectante para cada $i \geq 0$.

Assim, conforme as proposições que foram dadas acima, temos um funtor contravariante $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$ e um funtor covariante $\mathrm{Ext}^i_R(X,-)$ de $R$-módulos para $R$-módulos, para cada $i \geq 0$.

O seguinte resultado nos fornece algumas propriedades para o funtor Ext.

⟨paul bland 1⟩ **Proposição 2.5.5** Se $M$ é um $R$-módulo, as condições a seguir são equivalentes:

**(a)** $M$ é projetivo;
**(b)** $\mathrm{Ext}^n_R(M,X) = 0$, $\forall\, n \geqslant 1$, e para qualquer $R$-módulo $X$;
**(c)** $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$.

*Demonstração.* **(a)** $\Rightarrow$ **(b)**: Suponha que $M$ é um $R$-módulo projetivo. Como $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é um funtor contravariante aditivo exato a esquerda, agora o resultado segue a partir da Proposição 2.4.15 item (a).

**(b)** $\Rightarrow$ **(c)**: Segue de uma forma imediata.

**(c)** $\Rightarrow$ **(a)**: Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

de $R$-módulos.

Sabemos, pela Proposição 2.5.4, que existe uma sequência exata longa da forma:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N') \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N'') \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N') \to \cdots\,.$$

Como, por hipótese, $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$, segue que a sequência obtida a partir da sequência anterior

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N') \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N'') \to 0,$$

é exata. Portanto, pela Corolário 2.2.3, segue que $M$ é um $R$-módulo projetivo. ■

Temos mais propriedades fornecidas pela próxima proposição.

**Proposição 2.5.6** Se $M$ é um $R$ módulo, as condições a seguir são equivalentes:
**(a)** $M$ é injetivo;
**(b)** $\mathrm{Ext}^n_R(X,M) = 0$, $\forall\, n \geqslant 1$, e para qualquer $R$-módulo $X$;
**(c)** $\mathrm{Ext}^1_R(X,M) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$;
**(d)** $\mathrm{Ext}^1_R(R/I,M) = 0$, para qualquer ideal $I$ de $R$.

*Demonstração.* **(a)** $\Rightarrow$ **(b)**: Suponha que $M$ é um $R$-módulo injetivo, e seja

$$\mathbf{P}_\bullet: \quad \cdots \to P_n \to \cdots \to P_0 \to X \to 0$$

uma resolução projetiva do $R$-módulo arbitrário $X$. Como $M$ é injetivo, pelo Corolário 2.1.4, o funtor $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é um funtor exato. Então segue que o complexo $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X},M)$ é uma sequência exata (lembre-se de que $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é um funtor contravariante). Portanto, temos que $\mathrm{Ext}^i_R(X,M) = H^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X},M)) = 0$, para todo $i \geq 1$.
**(b)** $\Rightarrow$ **(c)** e **(c)** $\Rightarrow$ **(d)**: Seguem de uma forma imediata.
**(d)** $\Rightarrow$ **(a)**: Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

de $R$-módulos.

Sabemos que existe uma sequência exata longa (lembre-se de que $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é um funtor contravariante):

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/I,M) \to \mathrm{Hom}_R(R,M) \to \mathrm{Hom}_R(I,M) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/I,M) \to \cdots .$$

Como, por hipótese, $\mathrm{Ext}^1_R(R/I,M) = 0$, para qualquer ideal $I$ de $R$, segue que o $R$-homomorfismo:

$$\mathrm{Hom}_R(R,M) \to \mathrm{Hom}_R(I,M)$$

é sobrejetivo. Portanto, pelo Critério de Baer (qualquer homomorfismo se estende para $R$), conseguimos provar que $M$ é um $R$-módulo injetivo, como desejado. ■

**Funtor derivado à direita do funtor covariante** $\mathrm{Hom}_R(M,-)$

No lugar de se usar resoluções projetivas, podemos usar **resoluções injetivas**, e fazendo um desenvolvimento paralelo ao que foi feito na parte anterior, iremos conseguir contruir um outro funtor $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(M,-)$ da categoria de $R$-módulos para ela mesma, para cada $i \geq 0$; e teremos muitas propriedades similares, pelo fato que os bifuntores $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R$ e $\mathrm{Ext}^i_R$ são **naturalmente equivalentes**, para cada $i \geq 0$. Portanto, isto mostra que os $R$-módulos $\mathrm{Ext}^i_R(-,-)$ podem ser calculados usando resoluções projetivas ou resoluções injetivas. Por essa razão é que o funtor Ext é chamado de **bifuntor balanzado**.

### 2.5.2 Propriedades de Ext para módulos finitamente gerados

⟨localizationExt⟩ **Proposição 2.5.7** Seja $\phi : R \to S$ um homomorfismo plano de anéis, ou seja, via $\phi$ temos que $S$ é um $R$-módulo plano. Além disso, sejam $M,N$ dois $R$-módulos. Assuma que $R$ é um anel Noetheriano e $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado. Então, segue que

$$S \otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M,N) = \mathrm{Ext}^i_S(M \otimes_R S, N \otimes_R S),$$

para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$.

*Demonstração.* Como $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, podemos obter uma resolução livre

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

onde os $P_n$ são $R$-módulos livres de posto finito. Então, como $S$ é um $R$-módulo plano temos que $S\otimes_R P_\bullet \to S\otimes_R M \to 0$ é uma resolução livre como $S$-módulo de $S\otimes_R M$. Como $P_n$ são $R$-módulos livres de posto finito, temos que:

$$\mathrm{Hom}_S(S\otimes_R P_n, S\otimes_R N) \cong S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_n,N)$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$. Usando novamente o fato de $S$ ser plano sobre $R$, com a igualdade acima e o Theorema 1.5.1 e Exercício 18 da Lista de exercícios 2.3.1, conseguimos que

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}_S(S\otimes_R \mathbf{P}_\bullet, S\otimes_R N)) \cong S\otimes_R \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N))$$

e assim, finalizamos a prova. ■

⟨extlocal⟩ **Corolário 2.5.8** Seja $S$ um conjunto multilicativamente fechado de $R$, e sejam $M$ e $N$ $R$-módulos. Assuma que $R$ é Noetheriano e $M$ finitamente gerado. Então para todo $i$

$$S^{-1}\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = \mathrm{Ext}^i_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N),$$

*Demonstração.* É suficiente considerar homomorfismo plano de anéis $\phi : R \to S^{-1}R$ e aplicamos a Proposição 2.5.7. ■

## 2.6 Exemplos de *Ext*

**Exemplo 2.6.1** Seja $N$ um $R$-módulo. Suponha que $x\in R$ é não divisor zero de $R$ e $N$. Então há isomorfismos de $R$-módulos

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/xR,N) = \begin{cases} N/xN, & \text{se} \quad n=1 \\ 0, & \text{se} \quad n\geq 2. \end{cases}$$

Pelas suposições, há uma sequência exata curta de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\pi} R/xR \longrightarrow 0$$

Isto fornece uma resolução livre de $R/xR$ que pode ser usada para calcular $\mathrm{Ext}^i_R(R/xR,N)$ como cohomology do complexo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,N) \xrightarrow{\cdot x} \mathrm{Hom}_R(R,N) \longrightarrow 0$$

Finalmente, como $\mathrm{Hom}_R(R,N)\cong N$ temos o complexo

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot x} N \longrightarrow 0$$

Portanto a afirmação segue deste complex. Agora $\mathrm{Ext}^0_R(R/xR,N) = \mathrm{Hom}_R(R/xR,N)$ segue pela Proposição 2.4.15.

⟨resolNDZ⟩ **Observação 2.6.2** Seja $R$ um anel. Se $x, y \in R$ são não divisores zero em $R$, então podemos construir uma resolução de $R/xR$ sobre $R/xyR$ dado por:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow R/xyR \xrightarrow{\cdot x} R/xy \xrightarrow{\cdot y} R/xyR \xrightarrow{\cdot x} R/xyR \xrightarrow{\alpha_0} R/xR \longrightarrow 0,$$

e o complexo deletado é

$$\mathbf{P}_{\bullet,R/xR} : \cdots \longrightarrow R/xyR \xrightarrow{\cdot x} R/xy \xrightarrow{\cdot y} R/xyR \xrightarrow{\cdot x} R/xyR \longrightarrow 0.$$

**Exemplo 2.6.3** Para cada inteiro $m, n \geq 2$, nos calcularemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, N)$ para alguns módulos $N$. Pela Observação 2.6.2 temos a resolução projetiva e o complexo deletado de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}_{mn}$ como

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

$$\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n} : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow 0.$$

respeitivamente. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(-, N)$ no complexo deletado $\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}$ obtemos o seguinte cocomplexo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \xrightarrow{\cdot n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \xrightarrow{\cdot m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \longrightarrow \cdots.$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \cong N$, então o cocomplexo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ se transforma em

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot n} N \xrightarrow{\cdot m} N \longrightarrow \cdots.$$

Calculemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, N)$ quando $N = \mathbb{Z}_{mn}$ o complexo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \cdots.$$

Pela Observação 2.6.2, vemos que esta sequência é exceto no $i = 0$, neste caso nos temos

$$\frac{\mathrm{Ker}(\mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn})}{(0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{mn})} = m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$$

Therefore, temos

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{mn}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \text{se} \quad i = 0 \\ 0, & \text{se} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Calculemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, N)$ quando $N = \mathbb{Z}_m$ o complexo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(P_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot m=0} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot m=0} \cdots.$$

Agora, calculemos a imagem e o nucleo destas aplicações. Seja $g = \mathrm{mdc}(m, n)$ e observe que $m/g \in \mathbb{Z}$.

$$\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m\right) = (n)\mathbb{Z}_m = (m, n)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

O nucleo tem sido calculado anteriormente e

$$\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m\right) = \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}.$$

Assim temos,

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m\right) = \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_m\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m\right)} = \frac{\mathbb{Z}_m}{g\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_g.$$

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_m\right)} = \frac{\mathbb{Z}_g}{0} = \mathbb{Z}_g.$$

De maneira semelhante, nos calculamos

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_g$$

para todo $i \geq 3$.

### 2.6.1 Exercícios

1. Mostre através de um exemplo, que para dados $R$-módulos $M, N$ temos que $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)$ não é isomorfo à $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ em geral.
2. Seja $0 \to M \to N \to P \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos, e seja $L$ um $R$-módulo. Então, com as aplicações canônicas induzidas, a sequência:

   $$0 \to \mathrm{Hom}_R(P,L) \to \mathrm{Hom}_R(N,L) \to \mathrm{Hom}_R(M,L) \to \mathrm{Ext}^1_R(P,L) \to \ldots,$$

   é exata. Esta sequência é chamada a Ext-sequência exata longa. Também temos que, com as hipóteses anteriores, a sequência:

   $$0 \to \mathrm{Hom}_R(L,M) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,P) \to \mathrm{Ext}^1_R(L,M) \to \ldots,$$

   é exata.
   Prove que, para $i \geq 1$, temos que $\mathrm{Ext}^i_R(N,M) = 0$ se $N$ é um $R$-módulo livre.
3. Sejam $N$, $M$ dois $R$-módulos. Prove que $\mathrm{Ann}_R(N) \subseteq \mathrm{Ann}_R\left(\mathrm{Ext}^i_R(N,M)\right)$, para todo $i \geq 0$, onde $\mathrm{Ann}_R(\bullet)$ é o anulador de um dado $R$-módulo.
4. Se $n$ é um número inteiro negativo, mostre que $\mathrm{Ext}^n_R(A,B) = 0$, para quaisquer que sejam os $R$-módulos $A$, $B$.
5. Seja $A$ um $R$-módulo qualquer. Vamos observar a seguir que o $\mathrm{Ext}^0_R(A,\bullet)$ é naturalmente equivalente à $\mathrm{Hom}_R(A,\bullet)$.
   De fato, seja $B$ um outro $R$-módulo dado (ele é fixo, porém arbitrário), e seja

   $$\mathbf{I}^\bullet_B : 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \ldots,$$

uma resolução injetiva deletada para o $R$-módulo $B$. Desta forma, por definição, temos que

$$\mathrm{Ext}_R^0(A,B) = \mathrm{Ker}\left(\left(d^0\right)^*\right)/\mathrm{Im}\left(0 \to E^0\right) = \mathrm{Ker}\left(\left(d^0\right)^*\right).$$

Se a resolução injetiva (não-deletada) do $R$-módulo $B$ é:

$$0 \to B \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \ldots,$$

então a exatidão à esquerda de $\mathrm{Hom}_R(A,\bullet)$ nos fornece uma sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \xrightarrow{(\varepsilon)^*} \mathrm{Hom}_R\left(A,E^0\right) \xrightarrow{\left(d^0\right)^*} \mathrm{Hom}_R\left(A,E^1\right),$$

de modo que $\mathrm{Ker}\left(\left(d^0\right)^*\right) = \mathrm{Im}(\varepsilon^*)$, isto é, $\varepsilon^* : \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Ext}_R^0\left(A,E^0\right)$ é um isomorfismo. Prove que a aplicação, a qual é um $R$-homomorfismo, $\varepsilon^*$ define uma equivalência natural, mostrando assim $\mathrm{Ext}_R^0(A,\bullet)$ é naturalmente equivalente à $\mathrm{Hom}_R(A,\bullet)$, como queríamos no início.

6. Prove que $\mathrm{Ext}_R^0(\bullet,B)$ é naturalmente equivalente à $\mathrm{Hom}_R(\bullet,B)$, para $B$ um $R$-módulo qualquer.
7. Se $P$ é um $R$-módulo projetivo, então temos que $\mathrm{Ext}_R^n(P,B) = 0$, para todo $R$-módulo $B$ e para todo $n > 0$.
8. Se $E$ é um $R$-módulo injetivo, então temos que $\mathrm{Ext}_R^n(A,E) = 0$, para todo $R$-módulo $A$ e para todo $n \geq 1$.

## 2.7 O funtor $\mathrm{Tor}_i^R(-,-)$

Nesta seção, nós faremos um desenvolvimento do funtor derivado à esquerda do funtor produto tensorial $\bullet \otimes_R \bullet$. Lembrando sempre que $R$ é um anel comutativo e com identidade não nula.

### 2.7.1 Funtor derivado à esquerda de $-\otimes_R X$ e $X \otimes_R -$

Seja $X$ um $R$-módulo dado, e suponhamos que

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva do $R$-módulo $M$. Se aplicamos $\bullet \otimes_R X$ ao complexo deletado $\mathbf{P}_{\bullet,M}$, então temos um outro complexo

$$\mathbf{P}_{\bullet,M} \otimes_R X : \ldots \to P_i \otimes_R X \xrightarrow{\alpha_i \otimes \mathrm{Id}_X} P_{i-1} \otimes_R X \to \ldots \to P_1 \otimes_R X \xrightarrow{\alpha_1 \otimes \mathrm{Id}_X} P_0 \otimes_R X \to 0.$$

Definamos

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,X) := \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet,M} \otimes_R X) \quad \text{para todo} \quad i \geq 0.$$

Agora, seja $N$ um outro $R$-módulo e suponhamos que $\mathbf{Q}_\bullet$ é uma resolução projetiva de $N$. Se $f : M \to N$ é um homomorfismo de $R$-módulos então, pelo lema de comparação, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_i \otimes_R X & \xrightarrow{\alpha_{i-1}\otimes_R X} & P_{i-1} \otimes_R X & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1 \otimes_R X & \xrightarrow{\alpha_0 \otimes \mathrm{id}_X} & P_0 \otimes_R X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_i \otimes_R X} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}\otimes_R X} & & \downarrow{\scriptstyle f_1 \otimes id_X} & & \downarrow{\scriptstyle f_0 \otimes \mathrm{id}_X} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_i \otimes_R X & \xrightarrow{\beta_i \otimes_R X} & Q_{i-1} \otimes_R X & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Q_1 \otimes_R X & \xrightarrow{\beta_0 \otimes \mathrm{id}_X} & Q_0 \otimes_R X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de complexos, onde $f_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ é uma aplicação de complexos gerada por $f$. Então

$$\mathrm{Tor}_i^R(f,X) := \mathrm{H}_i(f_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X) : \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet,M} \otimes_R X) \to \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet,N} \otimes_R X),$$

onde $f_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X : \mathbf{P}_{\bullet,M} \otimes_R X \to \mathbf{P}_{\bullet,N} \otimes_R X$ é uma aplicação de complexos gerada por $f \otimes \mathrm{Id}_X$. Então, temos

$$\mathrm{Tor}_i^R(f,X) : \mathrm{Tor}_i^R(M,X) \to \mathrm{Tor}_i^R(N,X),$$

e assim, temos um funtor aditivo e covariante $\mathrm{Tor}_i^R(-,X)$ e um funtor derivado a esquerda de $R$-módulos tal que $\mathrm{Tor}_0^R(-,X) = - \otimes_R X$.

Se $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, é uma sequência exata curta de $R$-módulos e de $R$-homomorfismos, então existe uma sequência exata curta de complexos de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,L} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{Q}_{\bullet,M} \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{R}_{\bullet,N} \longrightarrow 0\ ,$$

onde $\mathbf{P}_\bullet$,$\mathbf{Q}_\bullet$ e $\mathbf{R}_\bullet$ são resoluções projetivas de $L$, $M$ e $N$ respectivamente. Pelo **Lema de Horse Shoe**, foi construido que $0 \to P_i \to Q_i = P_i \oplus R_i \to R_i \to 0$ é uma sequência exata curta que cinde, para cada $i \geq 0$ e pelo Exercício 2 item $(a)$ da subseção 1.3.3, construimos uma sequência exata curta de complexos

$$0 \to \mathbf{P}_{\bullet,L} \otimes_R X \xrightarrow{\mathbf{f}\otimes \mathrm{Id}_X} \mathbf{Q}_{\bullet,M} \otimes_R X \xrightarrow{\mathbf{g}\otimes \mathrm{id}_X} \mathbf{R}_{\bullet,N} \otimes_R X \to 0.$$

Agora, tomando $R$-módulos de homologia, obtemos uma Tor-**sequência exata longa**:

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(L,X) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_i^R(f,X)} \mathrm{Tor}_i^R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_i^R(g,X)} \mathrm{Tor}_i^R(N,X) \xrightarrow{\Phi_i} \\
\ldots \xrightarrow{\Phi_2} \mathrm{Tor}_1^R(L,X) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(f,X)} \mathrm{Tor}_1^R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(g,X)} \mathrm{Tor}_1^R(N,X) \xrightarrow{\Phi_1} \\
L \otimes_R X \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_X} N \otimes_R X \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Se os anéis em questão não fossem comutativos, poderíamos calcular o Tor usando a segunda variável (lembre-se de que em nosso caso, o anel $R$ sempre é comutativo, e então $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$, para quaisquer $R$-módulos $M$ e $N$). Ou seja, existe também uma Tor-**sequência exata longa** na segunda variável. Para observar isto, é suficiente escolher uma resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de $X$ e supor que

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de $R$-módulos. Como $P_i$ é um $R$-módulo projetivo temos, portanto plano, que é um $R$-módulo plano 2.3.3 item (5), e assim a sequência:

$$0 \longrightarrow P_i \otimes_R L \longrightarrow P_i \otimes_R M \longrightarrow P_i \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, para cada $i \geq 0$. Desta forma, temos a sequência exata curta de complexos, da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R L \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R N \longrightarrow 0$$

e agora, tomando $R$-módulos de homologia teremos a Tor-**sequência exata longa**, dada como segue:

$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X,L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X,N) \longrightarrow \\ &\ldots \xrightarrow{\Phi_2} \mathrm{Tor}_1^R(X,L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(X,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(X,N) \xrightarrow{\Phi_1} \\ &X \otimes_R L \longrightarrow X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, nos temos dois funtores aditivos exatos à direita

$$\mathrm{Tor}_i^R(-,X) : M_R \to M_R \quad \text{e} \quad \mathrm{Tor}_i^R(X,-) : M_R \to M_R$$

para cada $i \geq 0$.

A construções acima, mostra que $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ pode ser calculado usando resoluções projetivas de $M$ ou tomando resoluções projetivas do $R$-módulo $N$, por este motivo é chamado de bifuntor balanceado ou equilibrado. Alem disso como os anéis são sempre comutativos, temos que $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$ para cada $i \geq 0$.

### 2.7.2 Propriedades de *Tor*

⟨lemaTor⟩ **Lema 2.7.1** Se $P$ é um $R$-módulo projetivo, então $\mathrm{Tor}_i^R(N,P) = 0$, para qualquer $R$-módulo $N$ e para todo $i \geq 1$.

*Demonstração.* Como o funtor $\mathrm{Tor}_i$ é um funtor defivado a esquerda do $N \otimes_R -$, então, a demosntração deste lema, segue da Proposição 2.4.13, item $(a)$. ■

A seguir, temos uma conexão que relaciona $R$-módulos planos com o funtor Tor onde o anel o $R$ não é necessáriamente comutativo.

⟨PropFlatNFG⟩ **Proposição 2.7.2** Se $M$ é um $R$-módulo qualquer, as condições a seguir são equivalentes:

(a) $P$ é um $R$-módulo plano;
(b) $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$, para qualquer $R$-módulo $N$;
(c) $\mathrm{Tor}_i^R(P,N) = 0$, para qualquer $R$-módulo $N$ e para todo $i \geq 1$.

*Demonstração.* **(c)** $\Rightarrow$ **(b)**: Segue de uma forma imediata.

**(b)** $\Rightarrow$ **(a)**: Suponha que

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

é uma sequência exata curta de $R$-módulos. Então, temos a Tor-sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N) \longrightarrow P \otimes_R L \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

Se $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$, para qualquer $R$-módulo $N$, então segue que:

$$0 \longrightarrow P \otimes_R L \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

é uma sequência exata curta, e assim temos, por definição, que $P$ é um $R$-módulo plano.

**(a)** $\Rightarrow$ **(c)**: Vamos provar, por indução sobre $i$. Seja $P$ um $R$-módulo plano e seja $N$ um $R$-módulo qualquer. Então, existe uma sequência exata curta

$$0 \to K \to \tilde{P} \to N \to 0$$

de $R$-módulos, onde $\tilde{P}$ um $R$-módulo projetivo, pelo Corolário 2.2.8. Para $i = 1$, temos a sequência exata da forma:

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(P,\tilde{P}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N) \longrightarrow P \otimes_R K \longrightarrow P \otimes_R \tilde{P}$$

onde $\mathrm{Tor}_1^R(P,\tilde{P}) = 0$ pelo Lema 2.7.1. Mas, como $P$ é um $R$-módulo plano temos que $P \otimes_R K \longrightarrow P \otimes_R \tilde{P}$ é uma aplicação injetiva. Segue então que $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$. Agora assumindo a hipótese de indução, na sequência exata curta e a sequência exata longa, temos:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(P,\tilde{P}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(P,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i-1}^R(P,K) \longrightarrow \cdots .$$

Usando Lema 2.7.1, demonstramos que $\mathrm{Tor}_i^R(P,\tilde{P}) = 0$ e por hipotese de indução temos que $\mathrm{Tor}_{i-1}^R(P,K) = 0$. Segue $\mathrm{Tor}_i^R(P,N) = 0$ ■

**Proposição 2.7.3** Seja $M''$ um $R$-módulo as seguintes condições são equivalentes:

1. $M''$ é plano;
2. Para qualquer sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

e qualquer $R$-módulo $N$ a sequência

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração.* Seja $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta e suponhamos que $M''$ é plano. Então, pelo Lema 2.7.1, $\mathrm{Tor}_1^R(M'',N) = 0$ para qualquer $R$-módulo $N$ e a sequência exata longa

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

domonstra que $(1)$ implica $(2)$.

Reciprocamente, assuma que vale $(2)$ e considere uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de modo que $M$ seja projetivo. Então a sequência

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

é exata para qualquer arbitrário $R$-módulo $N$ (por hipótese). Isto, pelo Lema 2.7.1, $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) = 0$ pois $M$ é projetivo a sequência exata longa

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

demonstra que $\mathrm{Tor}_1^R(M'',N) = 0$, agora pela Proposição 2.7.2 provamos $(2)$ implica $(1)$. ■

### 2.7.3 Módulos finitamente gerados e o Tor

⟨CriterioPlano⟩ **Teorema 2.7.4** Para qualquer $R$-módulo $P$ as seguintes condições são equivalentes:

1. $P$ é plano;
2. $\mathrm{Tor}_i^R(P,N) = 0$, para qualquer $R$-módulo $N$ e para todo $i \geq 1$;
3. $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$, para todo $R$-módulo $N$ finitamente gerado;
4. $\mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) = 0$, para qualquer ideal finitamente gerado $\mathfrak{a} \subset R$.

*Demonstração.* (1) $\Rightarrow$ (2): segue do Lema 2.7.1 e as implicações (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) são diretas.

Vamos provar (4) $\Rightarrow$ (3). Consideremos $N$ um $R$-módulo finitamente gerado pelo conjunto $\{x_i | x_i \in N, i = 1,\ldots,s\}$. Demonstremos por indução sobre $s$ que $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$. Se $s = 1$, então existe $x \in N$ tal que $N = xR$. Então a aplicação

$$R \xrightarrow{(.x)} N$$

é sobrejetiva e $\mathrm{Ker}(.x) = \mathfrak{a}$ tal que $R/\mathfrak{a} \cong N$.
**Afirmação:** $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = \mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) = 0$.

Se $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado, da hipotese, temos que $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$. Caso contrário, consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0.$$

e a sequência exata longa do Tor

$$\ldots \mathrm{Tor}_1^R(P,R) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) \longrightarrow P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P \otimes_R R \cong P \longrightarrow P \otimes_R R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0.$$

Desde que $R$, como $R$-módulo, é livre, projetivo e plano, temos que $\mathrm{Tor}_1^R(P,R) = 0$ por 2.7.1. Portanto temos um isomorfismo

$$\mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Ker}(P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P).$$

Para qualquer ideal finitamente gerado $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ a composta de aplicações canônicas

$$P \otimes_R \mathfrak{a}' \longrightarrow P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P$$

é injetiva, pelo fato que $\mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}') = 0$ isto por hipotese. Com isto provemos que $\mathrm{Ker}(P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P)$ é injetivo. Seja $z = \sum_{j=1}^r m_j \otimes a_j \in \mathrm{Ker}(P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P)$ elemento qualquer. Seja $\mathfrak{a}' = (a_1,\ldots,a_r) \subset R$ um ideal gerado por os $a_i$. Então,

$$z' = \sum_{j=1}^{r} m_j \otimes a_j$$

também faz sentido como elemento de $P \otimes_R \mathfrak{a}'$. Claramente, $z'$ é preimagem de $z$ e portanto $z' \in \mathrm{Ker}(P \otimes_R \mathfrak{a}' \longrightarrow P)$. Mas, devemos ter $z' = 0$, logo $z = 0$. Em outras palavras $\mathrm{Ker}(P \otimes_R \mathfrak{a} \longrightarrow P)$ é injetivo, e temos que $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = \mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) = 0$.

Agora suponhamos $s > 1$, e $N = \sum_{j=1}^s Rx_j$. Então seja $N' = N = \sum_{j=1}^{s-1} Rx_j$ e considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0.$$

onde $N'' = N/N'$. Por hipotese de indução $\mathrm{Tor}_1^R(P,N') = 0$ e pelo caso $s = 1$ temos $\mathrm{Tor}_1^R(P,N'') = 0$. Então pela sequência exata longa do Tor

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N'') \longrightarrow \cdots .$$

demonstramos $\mathrm{Tor}_1^R(P,N) = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Seja $N' \longrightarrow N$ um homomorfismo injetivo de $R$-homomorfismos e seja

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0.$$

a sequência exata onde $N'' = N/N'$. Para mostrar que $P$ é plano, é suficiente mostrar que $P \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ é injetivo. Par provar isto, primeiro assumamos que $N$ é finitamente gerado. Então $N''$ é finitamente gerado (pela sequência exata) e $\mathrm{Tor}_1^R(P,N'') = 0$ por hipotese. Portanto a sequência exata

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,N'') \longrightarrow P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N \longrightarrow P \otimes_R N'' \longrightarrow 0.$$

mostra que

$$0 \longrightarrow P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N \longrightarrow P \otimes_R N'' \longrightarrow 0.$$

é exata. Em particular $P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N$ é injetiva.

Se $N$ não é necessáriamente finitamente gerado, provemos que $\mathrm{Ker}\,(P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N)$ é injetivo. Portanto, fixemos qualquer elemento $z = \sum_{j=i}^{r} m_j \otimes n_i \in \mathrm{Ker}\,(P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N)$, devemos mostrar que $z = 0$. Para isto, podemos sbstituir $N'$ pelo submódulo gerado por $n_1, \ldots, n_r$. Alem disso sabemos, pela propriedade de produto tensorial, que existe um submódulo finitamente gerado $\tilde{N} \subset N$ contendo $N'$ tal que a imagem de $z$ é trivial em $P \otimes_R \tilde{N}$. Assim $z \in \mathrm{Ker}\left(P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R \tilde{N}\right)$, disto e do caso especial tratado acima temos que $z = 0$. Portanto $P \otimes_R N' \longrightarrow P \otimes_R N$ é injetiva.

■

⟨propocriterio⟩ **Proposição 2.7.5** Um $R$-módulo $P$ é plano se, e somente se, para qualquer ideal $\mathfrak{a}$ finitamente gerado de $R$ a aplicação canônica $\mathfrak{a} \otimes_R P \longrightarrow P$ é injetivo

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que $P$ é um $R$-módulo plano. Como a aplicação $\mathfrak{a} \otimes_R P \longrightarrow P$ provem da aplicação injetiva $\mathfrak{a} \hookrightarrow R$ permanecendo injetiva para qualquer ideal $\mathfrak{a}$ de $R$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{a} \otimes_R P \longrightarrow P$ é injetiva para qualquer ideal $\mathfrak{a} \subset R$ finitamente gerado. Fixemos tal ideal e consiredes o sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0.$$

e a sequência exata longa do tor

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,R) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathfrak{a} \otimes_R P \longrightarrow P \longrightarrow P/\mathfrak{a}P \longrightarrow 0.$$

temos pelo Lema 2.7.1 temos $\mathrm{Tor}_1^R(P,R) = 0$, pois $R$ é plano como $R$-módulo. Portanto, se $\mathfrak{a} \otimes_R P \longrightarrow P$ é injetivo, então $\mathrm{Tor}_1^R(P,R/\mathfrak{a}) = 0$. Agoro, como $\mathfrak{a}$ é qualquer, pelo Teorema 2.7.4 temos que $P$ é plano. ■

⟨sing 7.4.3⟩ **Lema 2.7.6** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo tal que $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m},M)=0$. Então, $\mathrm{Tor}_1^A(N,M)=0$ para todo $R$-módulo $N$ de comprimento finito.

*Demonstração.* Provemos por indução sobre o comprimento de $\ell(N)$. O caso $\ell(N)=1$ é claro, pois isto implica que $N=R/\mathfrak{m}$. Seja $K\subset N$ um submódulo própio, então temos o a seguinte sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^R(K,M)\to\mathrm{Tor}_1^R(N,M)\to\mathrm{Tor}_1^R(N/K,M).$$

Pela hipotese de indução, $\mathrm{Tor}_1^R(K,M)=0$ e $\mathrm{Tor}_1^R(N/K,M)=0$. Isto implica que $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$. ■

⟨singular 7.4.2⟩ **Corolário 2.7.7** Sejam $(A,\mathfrak{m})$ e $(R,\mathfrak{n})$ dois anéis Noetherianos locais, $R$ uma $A$-álgebra e $\mathfrak{m}R\subset\mathfrak{n}$. Seja $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado. Então $M$ é plano como $A$-módulo se, e somente se $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m},M)=0$

*Demonstração.* Se $M$ é um $A$-módulo, então $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m},M)=0$, pelo Teorema 2.7.4.

Agora suponhamos, que $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m},M)=0$. Seja $I$ um ideal de $A$ é suficiente provar que $I\otimes_A M\to M$ é injetivo, pela Proposição 2.7.5. Para isto primeiro provemos a seguinte: Afirmação: $\cap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n\cdot(I\otimes_A M)=0$. Para provar isto consideremos $I\otimes_A M$ como um $R$-módulo via a $R$-estrutura de $M$. Este é finitamente gerado como $R$-módulo. Portanto, pelo Teorema de Interseção de Krull temos $\cap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{n}^n\cdot(I\otimes_A M)=0$. Mas, como $\mathfrak{m}R\subset\mathfrak{n}$, temos a afirmação.

Seja $x\in\mathrm{Ker}(I\otimes_A M\to M)$. Então mostraremos que $x\in\mathfrak{m}^n\cdot(I\otimes_A M)$ para todo $n$. Para provar isto consideremos a aplicação

$$(\mathfrak{m}^nI)\otimes_A M\to I\otimes_A M.$$

A imagem deste aplicação é $\mathfrak{m}^n\cdot(I\otimes_A M)$. Usando o Lema de Artin-Rees, obtemos um inteiro $s$ tal que $\mathfrak{m}^s\cap I\subset\mathfrak{m}^nI$. Portanto é suficiente provar que $x$ esta na imagem de

$$(\mathfrak{m}^n\cap I)\otimes_A M\to I\otimes_A M$$

para todo $n$. Da sequência exata

$$(\mathfrak{m}^n\cap I)\otimes_A M\to I\otimes_A M\to\left(\frac{I}{\mathfrak{m}^n\cap I}\right)\otimes_A M\to 0,$$

Deduzimos, que é suficiente ver que $x$ mapea-se para 0 em $\left(\frac{I}{\mathfrak{m}^n\cap I}\right)\otimes_A M$.
Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} I\otimes_A M & \xrightarrow{\eta} & \left(\frac{I}{\mathfrak{m}^n\cap I}\right)\otimes_A M \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & \xrightarrow{\beta} & (A/\mathfrak{m})\otimes_A M. \end{array}$$

Sabemos que que$\alpha(x)=0$. Portanto, $(\pi\circ\eta)(x)=0$. É suficiente provar que $\pi$ é injetiva. para Provar isto, considere a sequência exata

$$0 \to I/(\mathfrak{m}^n \cap I) \to A/\mathfrak{m}^n \to A/(I+\mathfrak{m}^n) \to 0$$

o qual induz uma sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/(I+\mathfrak{m}^n), M) \to I/(\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \to A/\mathfrak{m}^n \otimes_A M.$$

Para provar $\pi$ é injetiva é suficiente provar que $\mathrm{Tor}_1^A(A/(I+\mathfrak{m}^n), M) = 0$, mas como $A/(I+\mathfrak{m}^n)$ é de comprimento finito, pelo Lema 2.7.6 temos o resultado. ■

### 2.7.4 Exemplos de *Tor*

Para finalizar esta seção sobre o funtor Tor, vamos colocar uma observação e alguns exemplos.

**Observação 2.7.8** Se $x \in R$ não é um divisor de zero em $R$, e $M$ é um $R$-módulo qualquer, então $\mathrm{Tor}_i^R(M, R/(x))$ é igual à

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, R/(x)) = \begin{cases} M/(x)M, & \text{se} \quad i = 0 \\ (0 :_M x) = \{m \in M \mid xm = 0\}, & \text{se} \quad i = 1 \\ 0, & \text{se} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

De fato, podemos usar a resolução projetiva de $R/xR$:

$$P_\bullet : 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0,$$

agora tensorizando o complexo deletado por $M$, nos temos o seguinte complexo

$$P_{\bullet, R/xR} \otimes_R M : 0 \to M \xrightarrow{x} M \to 0,$$

ahora claculando as homologias

$$\mathrm{Tor}_0^R(M, R/(x)) = \frac{\mathrm{Ker}(M \to 0)}{\mathrm{Im}(M \xrightarrow{x} M)} = M/xM,$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, R/(x)) = \frac{\mathrm{Ker}(M \xrightarrow{x} M)}{\mathrm{Im}(0 \to M)} = (0 :_M x)$$

e

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, R/(x)) = 0,$$

para todo $i \geq 2$.

**Exemplo 2.7.9** Considere o $\mathbb{Z}_4$-módulo $\mathbb{Z}_2$ e considere uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0\,,$$

onde $\alpha_i(\overline{n}) = \overline{2n}$ para cada $i \geq 0$ e $\alpha_0(\overline{n}) = \overline{n}$. Tensorizando por $\mathbb{Z}_2$ a resololução deletada de $\mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}_4$-módulo, nos obtemos o complexo $\mathbf{P}_{\bullet, \mathbb{Z}_2} \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$ :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_1 \otimes id_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0\,.$$

Nos podemos ver que as aplicações $\alpha_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2} = 0$, isto é

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

e assim pela Proposição 2.4.13 item $(a)$, temos que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$. Além disso, aúltima sequência exata longa pode ser substituida por

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

agora por cálculo direto temos que $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ para $i \geq 1$.

**Exemplo 2.7.10 — Tor sobre $\mathbb{Z}$.** Calcule $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N)$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$ quando $M$ e $N$ são $\mathbb{Z}$-módulos finitamente gerados. Sejam $M$, $N$ dois $\mathbb{Z}$-módulos finitamente gerados, isto é grupos finitos. Podemos escrever uma sobrejeção $\varepsilon : F_0 \to M$, com $F_0$ um $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto finito. Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais, temos que $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ é também um $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto finito ver Exercício 1 na lista de Exercícios 1.2.4. Desta forma, obtemos uma resolução projetiva:

$$0 \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

para o $\mathbb{Z}$-módulo $M$.

Isto mostra que o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N) = 0$, para todo $i > 1$. Como $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(M,N) = M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, somente nos resta calcular $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N) = \mathrm{Ker}(d_1 \otimes \mathrm{Id}_N)$. Mas como $M$ e $N$ são $\mathbb{Z}$-módulos isto é grupos abelianos finitos, pelo Teorema Fundamental de Grupos, nos podemos escrever $M = \oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ e $N = \oplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$. Portanto tudo se resume a calcular

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m),\mathbb{Z}/(n)) = \mathbb{Z}/(d),$$

onde $d = \mathrm{m.d.c}(m,n)$, ou seja, é o máximo divisor comum entre os números inteiros $m$ e $n$. Usando as propriedades de compatibilidade de soma direta e produto tensorial, nos temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N) &\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \oplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}\right) \\
&\cong \oplus_{i=0}^r \oplus_{j=0}^s \mathrm{Tor}_1^R(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}) \\
&\cong \oplus_{i=0}^r \oplus_{j=0}^s \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z} \\
&\cong \left(\oplus_{i=0}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\oplus_{j=0}^s \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}\right) \\
&\cong M \otimes_{\mathbb{Z}} N.
\end{aligned}$$

Agora mostremos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m),\mathbb{Z}/(n)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Do exemplo anterior considere a resolução projetiva de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e tensorize por $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, teremos que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m),\mathbb{Z}/(n)) = \{\overline{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} | n \cdot \overline{k} = 0\} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Desde que $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ o resultado segue.

### 2.7.5 Exercícios

1. Se $R$ é uma domínio de ideais primcipais (DIP) e $M$ é um submódulo de um $R$-módulo livre $F$, mostre que $M$ é também livre e $\text{posto}(M) \leq \text{posto}(F)$.
2. Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos onde $N$ é plano. Então $L$ é plano se, e somente se $M$ é plano.
3. Já sabemos, que em todo este livro, o anel $R$ em questão, ou qualquer outro anel que se considere, é **comutativo** e com identidade não nula. Prove que, para $N$, $M$ dois $R$-módulos quaisquer, vale o isomorfismo:

$$\text{Tor}_i^R(M,N) \cong \text{Tor}_i^R(N,M),$$

para todo $i \geq 0$.
4. Seja $S \subset R$ um conjunto multiplicativamente fechado. Prove que:

$$S^{-1}\text{Tor}_i^R(M,N) = \text{Tor}_i^{S^{-1}R}\left(S^{-1}M, S^{-1}N\right),$$

para todo $i \geq 0$.
5. Seja $M$ um $R$-módulo e seja $x \in R$ um não-divisor de zero sobre $M$ e também sobre o $R$-módulo $R$. Além disso, seja $N$ um $R/(x)$-módulo. Prove então que:

$$\text{Tor}_i^{R/(x)}(N, M/(x)M) \cong \text{Tor}_i^R(N,M),$$

para todo $i \geq 0$.
6. Sejam $I$, $J \subset R$ dois ideais. Nessas condições, prove que:

$$\text{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/(I \cdot J).$$

Dica: Use a sequência exata curta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$, e use a sequência exata longa de $\text{Tor}_i^R(-, R/J)$, com isto será obtido uma sequência exata

$$0 = \text{Tor}_1^R(R, R/J) \to \text{Tor}_1^R(R/I, R/J) \to I \otimes_R R/J \to R/J \to R/I \otimes_R R/J \to 0.$$

7. Seja $M$ um $R$-módulo e seja $B = R[x_1, \ldots, x_n]/J$. Prove então que:

$$\text{Tor}_i^R(M,B) \cong \text{Tor}_i^{R[x_1,\ldots,x_n]}(M \otimes_R R[x_1,\ldots,x_n], B),$$

para todo $i \geq 0$.
8. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, $k = R/\mathfrak{m}$ o corpo residual, $M$ um $R$-módulo finitamente gerado e considere que

$$\ldots \to F_n \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

uma resolução livre (que também pode ser uma resolução livre minimal) de $M$, em que todos os $R$-módulos livres $F_i$ são **finitamente gerados**, para todo $i \geq 0$. Prove que,

$$\dim_k\left(\text{Tor}_i^R(M,k)\right) = \text{rank}(F_i) < \infty,$$

para todo $i \geq 0$. O número $\text{rank}(F_i)$ é chamado o $i$-ésimo **número de Betti** de $M$.
9. Prove que se $A$ é um $R$-módulo projetivo (ou plano), temos que $\text{Tor}_i^R(A,B) = 0$, para todo $i > 0$. Em particular, isto vale quando o $R$-módulo $A$ é livre.

10. Se $0 \to A^{'} \to F \to A \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos, então sabemos que o $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ é o núcleo do $R$-homomorfismo $A^{'} \otimes_R B \to F \otimes_R B$. Prove que:

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(A,B) \cong \mathrm{Tor}_i^R\left(A^{'},B\right),$$

para todo $i \geq 1$.

11. Notamos que se $r \in R$ e $M$, $N$ são dois $R$-módulos, então a aplicação:

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N),$$

para todo $i \geq 0$, induzida pela multiplicação por $r$ sobre o $R$-módulo $N$ é dada pela multiplicação por $r$ sobre $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$. Isto pode ser visto como segue.
Escolha uma resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de $M$. Quando tensorizamos $N \xrightarrow{r} N$, obtemos a aplicação de complexos de cadeias $\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{r} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N$ que é induzida pela multiplicação por $r$, e esta induz a aplicação de homologia. prove que o mesmo fato vale quando nós usamos $M \xrightarrow{r} M$ para induzir a aplicação:

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N),$$

para todo $i \geq 0$, usando a simetria do Tor. (Alternativamente, usamos multiplicação por $r$ sobre todo $R$-módulo $P_n$ para levantar $M \xrightarrow{r} M$ à uma aplicação $\mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{r} \mathbf{P}_\bullet$ da resolução projetiva de $M$ para ela mesma. Então aplicamos o funtor $\bullet \otimes_R N$ e tomamos homologia).
Além disso, se $r \in \mathrm{Ann}_R(N)$, então a multiplicação $N \xrightarrow{r} N$, é a aplicação nula, e consequentemente induz a aplicação nula:

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N),$$

para todo $i \geq 0$, a qual é também a aplicação dada pela multiplicação por $r$. Em consequência, temos que $\mathrm{Ann}_R(N)$ anula todos os $R$-módulos $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$, para todo $i \geq 0$. O mesmo vale para o $\mathrm{Ann}_R(M)$, e assim segue que $\mathrm{Ann}_R(M) + \mathrm{Ann}_R(N)$ anula todos os $R$-módulos $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$, para todo $i \geq 0$.

12. Seja $R$ um anel noetheriano comutativo e sejam $M$ e $N$ $R$-módulos finitamente gerados. Para cada índice $i \in \mathbb{N}_0$, mostre que os $R$-módulos $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)$ e $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ são finitamente gerados.

## 2.8 Dimensão Projetiva

Nesta seção, vamos entender o que significa a **dimensão projetiva** de um $R$-módulo $M$.

?⟨Propo1⟩? **Definição 2.8.1** Seja $M$ um $R$-módulo e considere a seguinte resolução projetiva para $M$:

$$\mathbf{P}_\bullet: \quad 0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

Dizemos, neste caso, que $\mathbf{P}_\bullet$ tem comprimento $n$.

**Definição 2.8.2** Dado um $R$-módulo $M$, a **dimensão projetiva** (ou **dimensão homológica**) de $M$ é dada por:

$$\mathrm{pdim}_R(M) := \inf\{n | n \text{ é comprimento de uma resolução projetiva de } M\}.$$

Se $M$ não tiver uma resolução projetiva finita, definimos $\mathrm{pdim}_R(M) = \infty$.

O próximo resultado, caracteriza um $R$-módulo projetivo em termos de sua dimensão projetiva.

**Proposição 2.8.3** A dimensão projetiva de um $R$-módulo $M$ é zero se, e somente se, $M$ é projetivo.

*Demonstração.* ($\Leftarrow$) Se $M$ é projetivo, então

$$0 \longrightarrow P_0 = M \xrightarrow{Id_M} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva para $M$. Logo, pela definição, temos que $\text{pdim}_R M = 0$.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, se $0 \to P_0 \to M \to 0$ é uma resolução projetiva, então $M \cong P_0$. Logo, $M$ é projetivo. ■

**Lema 2.8.4** (**Deslocamento de Dimensão**) Seja $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0$, uma sequência exata de $R$-módulos onde os $L_i$ são projetivos para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Então para qualquer $R$-módulo $N$, temos

⟨DimShifting⟩

$$\text{Ext}^i_R(L_n, N) = \text{Ext}^{i+n}_R(M, N) \quad \text{e} \quad \text{Tor}^R_i(L_n, N) = \text{Tor}^R_{n+i}(M, N).$$

*Demonstração.* Faremos a prova por indução sobre $n$. Suponha $n = 1$. Então, neste caso teremos uma sequência exata

$$0 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0,$$

onde $L_0$ é um $R$-módulo projetivo. Portanto, com isto teremos as sequências exatas longas

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}^i_R(L_0, N) \longrightarrow \text{Ext}^i_R(L_1, N) \longrightarrow \text{Ext}^{i+1}_R(M, N) \longrightarrow \text{Ext}^{i+1}_R(P_0, N) \longrightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \longrightarrow \text{Tor}^R_{i+1}(L_0, N) \longrightarrow \text{Tor}^R_{i+1}(M, N) \longrightarrow \text{Tor}^R_i(L_1, N) \longrightarrow \text{Tor}^R_i(L_0, N) \longrightarrow \cdots$$

pelos resultados acima temos que $\text{Ext}^i_R(L_0, N) = \text{Tor}^R_i(L_1, N) = 0$ para $i \geq 1$. Portanto

$$\text{Ext}^i_R(L_1, N) \cong \text{Ext}^{i+1}_R(M, N) \;\text{ e }\; \text{Tor}^R_{i+1}(M, N) \cong \text{Tor}^R_i(L_1, N).$$

Agora suponhamos que $n \geq 2$ e o resultado é valido para uma sequência de comprimento $n-1$. Da sequência exata, podemos ter duas sequências exatas

$$0 \to K \to L_0 \to M \to 0,$$

e

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_1 \to K \to 0,$$

Com isto, temos os isomorfismos desejados

$$\text{Ext}^i_R(L_n, N) \cong \text{Ext}^{i+n-1}_R(K, N) = \text{Ext}^{i+n}_R(M, N)$$

e

$$\text{Tor}^R_i(L_n, N) \cong \text{Tor}^R_{i+n-1}(K, N) \cong \text{Tor}^R_{i+n}(M, N).$$

onde o primeiro issomorfismo segue por indução e segundo issomorfismo segue pelo caso $n = 1$. ■

O próxima teorema, caracteriza um $R$-módulo projetivo de dimensão finita em termos do Ext.

⟨projfinta⟩ **Teorema 2.8.5** Se $M$ é um $R$-módulo e $n \in \mathbb{Z}^+$, as seguintes condições são equivalentes:

**(i)** $\text{pdim}_R(M) \leqslant n$;

**(ii)** $\text{Ext}^i_R(M,X) = 0$, $\forall\, i > n$ e para todo $R$-módulo $X$;

**(iii)** $\text{Ext}^{n+1}_R(M,X) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$;

**(iv)** Se

$$0 \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata com $P_i$ projetivo, para $i = 0, \ldots, n-1$, então $K_{n-1}$ é projetivo.

*Demonstração.* **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**: Por hipótese, existe uma resolução projetiva limitada, da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

A partir dela, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0,X) \xrightarrow{\alpha_1^*} \text{Hom}_R(P_1,X) \xrightarrow{\alpha_2^*} \cdots \xrightarrow{\alpha_n^*} \text{Hom}_R(P_n,X),$$

uma vez que $\text{Hom}_R(-,X)$ é um funtor contravariante e exato à esquerda. Assim, pela definição do funtor Ext, temos que:

$$\text{Ext}^i_R(M,X) = \frac{\ker(\alpha_{i+1}^*)}{\text{Im}(\alpha_i^*)} = 0, \quad \forall \quad i > n.$$

**(ii)** $\Rightarrow$ **(iii)**: Segue de uma forma imediata.

**(iv)** $\Rightarrow$ **(i)**: Se (iv) vale, temos a seguinte resolução projetiva para o $R$-módulo $M$:

$$0 \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Assim, $\text{pdim}_R(M) \leqslant n$.

**(iii)** $\Rightarrow$ **(iv)**: Seja

$$P_\bullet: \quad 0 \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata com $P_i$ projetivo, para $i = 0, \ldots, n-1$.

**Afirmação:** $\text{Ext}^1_R(K_{n-1},X) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$. Provado isso segue, da Proposição 2.5.5, que $K_{n-1}$ é projetivo. Mas isto segue, pelo Lema 2.8.4 e hipótese, $\text{Ext}^1_R(K_{n-1},X) = \text{Ext}^{n+1}_R(M,X) = 0$. ■

**Proposição 2.8.6** Se $R$ é um anel e $M$ é um $R$-módulo qualquer, Dada qualquer resolução projetiva $(P_\bullet, \alpha_\bullet)$ de $M$ onde $\text{Coker}(\alpha_{n+1})$ é projetivo. Então $\text{pdim}_R(M) \leq n$.

*Demonstração.* seja

$$\mathbf{P}_\bullet: \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolution projetiva de $R$-módulos. Como

$$\text{Coker}(\alpha_{n+1}) \cong P_n/\text{Im}(\alpha_{n+1}) \cong P_n/\text{Ker}(\alpha_n) \cong \text{Im}(\alpha_n).$$

Com isto temos as sequência exata de $R$-módulos

$$\mathbf{P}_\bullet: \ 0 \longrightarrow \text{Im}(\alpha_n) \xrightarrow{\alpha_i} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

. Com isto concluimos a afirmação. ■

A seguir, temos as seguintes consequências imediatas.

**Corolário 2.8.7** Se $R$ é um anel e $M$ é um $R$-módulo arbitrário, então:

$$\operatorname{pdim}_R(M) = \sup\{n : \operatorname{Ext}^n_R(M,N) \neq 0\},$$

onde $N$ é um $R$-módulo qualquer.

Seja

**Corolário 2.8.8** Considere a sequência exata de $R$-módulos

$$0 \to L \to M \to N \to 0.$$

If se dois dos módulos tem dimensão projetiva finita sobre $R$, então os terceito também tem sidensão finita.

*Demonstração.* Primeiro provemos o caso onde $\operatorname{pdim}_R(L) < \infty$ e $\operatorname{pdim}_R(M) < \infty$. Os outros casos são similáres. Assuma que $\operatorname{pdim}_R(L) < n$ e $\operatorname{pdim}_R(M) < n$. O Teorema 2.8.5 implica que para qualquer $R$-módulo $X$ e qualquer $i \geq n$, temos

$$\operatorname{Ext}^i_R(L,X) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(M,X).$$

Agora de sequêncoa exata longa em $\operatorname{Ext}^i_R(-,X)$, concluimos que $\operatorname{Ext}^i_R(N,X) = 0$ para todo $i > n$. Novamente pelo Teorema 2.8.5.

■

A Proposição a seguir, é um resultado bastante importante. Para demonstrar use o Lema de Horse Shoe (o Lema da Ferradura).

**Proposição 2.8.9** Seja $0 \to M \to N \to T \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Então:

$$\operatorname{pdim}_R(N) \leqslant \max\{\operatorname{pdim}_R(M), \operatorname{pdim}_R(T)\}.$$

Isto significa, se as dimensões projetivas de $M$ e $T$ são finitas, então a dimenensão projetiva de $N$ é finita.

*Demonstração.* Pelo Lemma da ferradura 2.5.2.

■

### 2.8.1 Exercícios

1. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e de dimensão zero. Seja $M$ um $R$-módulo qualquer com $\operatorname{pdim}_R(M) < \infty$. Prove que $M$ é um $R$-módulo livre.
2. Prove que se $0 \to M \to N \to T \to 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos. Então
$$\operatorname{pdim}_R(N) \leqslant \max\{\operatorname{pdim}_R(M), \operatorname{pdim}_R(T)\}.$$
3. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, $k = R/\mathfrak{m}$ o corpo residual, e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. prove que:
$$\operatorname{pdim}_R(M) = \sup\left\{i \mid \operatorname{Tor}^R_i(M,k) \neq 0\right\}.$$

4. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Prove que:

   $\mathrm{pdim}_R(M) \geq$ o maior comprimento de uma sequência regular sobre $\mathfrak{p}$ a qual está em $\mathfrak{m}$,

   e é uma sequência regular maximal em $\mathfrak{m}$, que é o único ideal maximal do anel local em questão.
5. Se $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de $R$-módulos com $P$ projetivo, então a sequência

   $$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(K,N)$$

   é exata. Prove que $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = \mathrm{Coker}(f^*)$.

## 2.9 Dimensão Injetiva

A definição de dimensão injetiva é o **dual** da definição de dimensão projetiva.

?⟨Propo1⟩? **Definição 2.9.1** Seja $N$ um $R$-módulo e considere a seguinte resolução injetiva para $N$:

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \to N \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{n-1} \to I^n \to 0.$$

Neste caso, dizemos que $\mathbf{I}^\bullet$ possui comprimento $n$.

A seguir, apresentamos a definição de **dimensão injetiva** de um $R$-módulo dado.

**Definição 2.9.2** Dado um $R$-módulo $N$, a **dimensão injetiva** de $N$ é dada por:

$$\mathrm{idim}_R(N) := \inf\{n | n \text{ é comprimento de uma resolução injetiva de } N\}.$$

Uma prova análoga àquelas feitas anteriormente nos fornece os seguintes resultados e observe que se $0 \to N \to I^\bullet$ é uma complexo exato de comprimento $n$ e $\mathrm{idim}_R(I^i) \leq m$, $i = 0,\ldots,n-1$, então $\mathrm{Ext}^m_R(M,I^n) = \mathrm{Ext}^{m+n}_R(M,N)$. Para provar isto é similar ao lema acima.

⟨oliver9.8⟩ **Teorema 2.9.3** Se $N$ é um $R$-módulo e $n \in \mathbb{Z}^+$, as seguintes condições são equivalentes:

**(i)** $\mathrm{idim}_R(N) \leqslant n$;
**(ii)** $\mathrm{Ext}^i_R(X,N) = 0$, $\forall\, i > n$ para qualquer $R$-módulo $X$;
**(iii)** $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(X,N) = 0$, para qualquer $R$-módulo $X$ finitamente gerado;
**(iv)** $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/I,N) = 0$, para qualquer ideal $I$ de $R$;
**(v)** Se $0 \longrightarrow N \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow C^{n-1} \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de $R$-módulos com $E^i$ sendo $R$-módulos injetivos, para $i = 0,\ldots,n-1$, então $C^{n-1}$ é um $R$-módulo injetivo.

*Demonstração.* As provas de **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** $\Rightarrow$ **(iii)** $\Rightarrow$ **(iv)** são diretas.

A prova de **(iv)** $\Rightarrow$ **(v)** é semelhante à prova do Teorema 2.8.5 ao inves de usar resoluções projetivas usa-se resoluções injetivas.

Provemos **(v)** $\Rightarrow$ **(i)**. Seja $0 \to N \to \mathbf{E}^\bullet$ uma resolução injetiva conforme dado na hipotese, e seja $C^{n-1}$ a imagem de $E^{n-2} \to E^{n-1}$. Por $(v)$, o módulo $C^{n-1}$ é injetivo, assim temos um aresolução injetiva de $N$ de comprimento $n$. ■

Temos as seguintes consequências.

**Corolário 2.9.4** Se $N$ é um $R$-módulo, então

$$\operatorname{idim}_R(N) := \inf\{n : \text{dada qualquer resolução injetiva } (\mathbf{I}^\bullet, d^\bullet) \text{ de } M,\ \operatorname{Im}(d^{n-1}) \text{ é injetiva}\}.$$

⟨imensaoinjetiva⟩ **Corolário 2.9.5** Se $N$ é um $R$-módulo qualquer, então:

$$\operatorname{idim}_R(N) = \sup\{n : \operatorname{Ext}^n_R(M,N) \neq 0\},$$

onde $M$ é um $R$-módulo qualquer.

### 2.9.1 Dimensão injetiva e anéis Noetherianos

⟨oliver9.11⟩ **Proposição 2.9.6** Seja $R$ um anel Noetheriano, $M,N$ dois $R$-módulos e $i$ um inteiro. Suponha que $N$ finitamente gerado. Se $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M) = 0$ para qualquer $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(N)$, então $\operatorname{Ext}^i_R(N,M) = 0$.

*Demonstração.* Como $N$ é finitamente gerado, podemos pegar uma série de compisição $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = N$ tal que $N_j/N_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$, para adequados $\mathfrak{p}_j$ primos de $R$. Provamos por indução sobre $j$ que $\operatorname{Ext}^i_R(N_j,M) = 0$. Isto é claro para $j = 0$. Se $j > 0$, temos a sequência exata de $R$-módulos

$$0 \to N_{j-1} \to N_j \to R/\mathfrak{p}_j \to 0,$$

e a sequência exata longa do Ext

$$\to \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}_j,M) \to \operatorname{Ext}^i_R(N_j,M) \to \operatorname{Ext}^i_R(N_{j-1},M) \to .$$

usando a suposição e a hipotese de indução, obtemos que $\operatorname{Ext}^i_R(N_j,M) = 0$.

■

?⟨oliver9.12⟩? **Proposição 2.9.7** Seja $R$ um anel Noetheriano, seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes.

1. $\operatorname{idim}(M) \leq n$,
2. para qualquer ideal primo $\mathfrak{p}$ de $R$, temos $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M) = 0$,
3. para qualquer ideal primo $\mathfrak{p}$ de $R$, temos $\operatorname{Ext}^{n+1}_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p}) = 0$.

*Demonstração.* $(1) \Leftrightarrow (2)$. Isto segue da Proposição 2.9.6 e a equivalência $(3) \Leftrightarrow (1)$ do Teorema 2.9.3.

$(2) \Rightarrow (3)$. Segue do fato de que localização de módulos nulos é nulo e localização comuta com o Ext.

$(3) \Rightarrow (2)$. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo tal que $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M) \neq 0$, e suponhamos que $\mathfrak{p}$ é um ideal maximal com esta propriedade. Seja $x \notin \mathfrak{p}$. A sequência exata

$$0 \to R/\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p},x) \to 0$$

induz a sequência exata

$$\to \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M) \to \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M) \to$$

Para qualquer $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(R/(\mathfrak{p},x))$, temos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, consequêntemente pela maximalidade de $\mathfrak{p}$ temos $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{q},M) = 0$. Segue da Proposição 2.9.6 que $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M) = 0$, então $x$ é não divisor de zero em $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M)$ (pois o mapa $\cdot x$ é injetivo). O homomorfismo localização $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M)_\mathfrak{p} \to \left(\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M)\right)_\mathfrak{p}$ é injetivo, pois seu nucleo é o conjunto de elementos aniquilados por algum elemento $x \notin \mathfrak{p}$. Como $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p},M) \neq 0$, segue que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p}) \neq 0$, contradição. ■

⟨oliver9.13⟩ **Lema 2.9.8** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de $R$ tal que $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Então

$$\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p}) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_R(k,M) \neq 0.$$

*Demonstração.* Como $\dim(R/\mathfrak{p}) > 0$, existe um $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$. Com isto temos uma sequência exata

$$0 \to R/\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p},x) \to 0$$

que da uma sequência exata

$$\to \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M) \to$$

O $R$-módulo $R/(\mathfrak{p},x)$ tem dimensão 0 (pois $\dim(R/(\mathfrak{p},x)) = \dim(R/\mathfrak{p}) - 1 = 0$). Consequêntemente, $\mathrm{Supp}_R(R/(\mathfrak{p},x)) \subset \{\mathfrak{m}\}$. Se $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(k,M) = 0$, pela Proposição 2.9.6 temos $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M) = 0$, logo o mapa $\cdot x$ é sobrejetivo. Assim temos $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M) = x\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)$, pelo Lema de Nakayama deducimos que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M) = 0$, localizando temos $\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M) = 0$ como desejado. ■

⟨oliver9.14⟩ **Proposição 2.9.9** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de $R$ tal que $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$. Então para todo $i$

$$\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p}) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}^{d+i}_R(k,M) \neq 0.$$

*Demonstração.* Considere uma cadeia de ideais primos $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$. Denotemos por $E_j = \mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{p}_j}}(k(\mathfrak{p}_j),M_{\mathfrak{p}_j})$, e por indução sobre $j$ mostremos que $E_j \neq 0$. Se $j = 0$, é direto pelo suposição. Se $j > 0$, e aplicando o Lema 2.9.8 para o anel $R_{\mathfrak{p}_j}$ e o ideal primo $\mathfrak{p}_j R_{\mathfrak{p}_j}$, vemos que $E_{j-1} \neq 0 \Rightarrow E_j \neq 0$. Desde então $E_d = \mathrm{Ext}^{d+i}_R(k,M)$, terminamos a prova. ■

?⟨oliver9.15⟩? **Proposição 2.9.10** Seja $R$ um anel Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, e $d = \dim(R/\mathfrak{p})$. Então $\mathrm{Ext}^d_R(k,M) \neq 0$.

*Demonstração.* Temos que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, segue $\mathrm{Ext}^0_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p})$, concluimos usando a Proposição 2.9.9. ■

### 2.9.2 Exercícios

1. Suponha que $0 \to D \to L_1 \to L_2 \to \ldots \to L_n \to D' \to 0$ é uma sequência exata de $R$-módulos e $d \geq 0$. Prove que, se $\mathrm{idim}_R\left(L_j\right) \leq d$, para todo $j$, então $\mathrm{Ext}^k_R\left(B,D'\right) \cong \mathrm{Ext}^{k+n}_R(B,D)$, para todo $R$-módulo $B$, e $k > d$.
2. Suponha que $C$ é um $R$-módulo qualquer. Prove a seguinte implicação:

$$\mathrm{idim}_R(C) \leq n \Rightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/I,C) = 0,$$

para qualquer ideal $I$ de $R$, e sendo $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

## 2.10 Alguns resultados no caso local e módulo finitamente gerados

Nesta subseção $(R,\mathfrak{m},k)$ será um anel local comutatico Noetheriano.

⟨TeoEquiv⟩ **Teorema 2.10.1** Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local e Noetheriano, e se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, então as seguintes condições são equivalentes:

1. $M$ é um $R$-módulo livre;
2. $M$ é um $R$-módulo projetivo;
3. $M$ é um $R$-módulo plano;
4. $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$, $\forall\, i>0$ e para qualquer $R$-módulo $N$;
5. $\mathrm{Tor}_1^R(M,k)=0$.

*Demonstração.* Todas as implicações são imediatas e valem independentemente do anel ser ou não local. A única que não é imediata e depende desse fato (do anel ser local) é a seguinte:

$(5)\Rightarrow(1)$ : Seja $F$ um $R$-módulo livre mapeado sobrejetivamente nos geradores minimais de $M$ de tal forma que a seguinte sequência é exata:

$$0\longrightarrow S\longrightarrow F\longrightarrow M\longrightarrow 0.$$

Por hipótese, $\mathrm{Tor}_1^R(M,k)=0$. Assim, aplicando $-\otimes_R k$ nessa sequência, temos que

$$0\longrightarrow \frac{S}{\mathfrak{m}S}\longrightarrow \frac{F}{\mathfrak{m}F}\longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{m}M}\longrightarrow 0,$$

é uma sequência exata curta.

Por outro lado, da forma com que tomamos $F$, podemos mapear a sua base sobrejetivamente no conjunto de geradores minimais de $M$. Assim, $F=R^{\Omega}$ ($\Omega$ um conjunto de índices, **não necessariamente finito**) e então

$$\frac{F}{\mathfrak{m}F}\cong\frac{M}{\mathfrak{m}M}.$$

Logo, $\dfrac{S}{\mathfrak{m}S}=0$. Segue, pelo Lema de Nakayama, que $S=0$. Portanto, $M\cong F$ e assim, temos que $M$ é um $R$-módulo livre, como desejado. ■

⟨ExtTor⟩ **Lema 2.10.2** Seja $R$ um anel local e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalente:

1. $M$ é livre;
2. $M$ é projetivo;
3. $M$ é plano;
4. $\mathrm{Ext}_R^1(M,k)=0$;
5. $\mathrm{Tor}_1^R(M,k)=0$.

*Demosntração.* As provas de $(4)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(5)$ são diretas.

A prova de $(5)\Rightarrow(1)$ segue deo Teorema 2.10.1.

Provemos $(4)\Rightarrow(1)$ Seja $m_1,\ldots,m_n$ geradores de $M$ tal que módulo $\mathfrak{m}M$ da uma base de $M/\mathfrak{m}M$ e isto da um morfismo sobrejetivo $\phi:R^n\to M$ e suponha que $Q=\mathrm{Ker}(\phi)$. Temos uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,k) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_R(R^n,k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q,k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,k) \longrightarrow \cdots .$$

Com isto temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,k) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathrm{Hom}_R(R^n,k) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q,k) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(M,k) \longrightarrow \ldots \\ & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & & & \\ & & \mathrm{Hom}_k(M\otimes_R k,k) & \xrightarrow{(\phi\otimes id_k)^*} & \mathrm{Hom}_k(R^n\otimes_R k,k) & & & & \end{array}$$

daqui, como $(\phi \otimes id_k)^*$ é um ismorfismo pois $M \otimes_R k \cong R^n \otimes_R k$, logo $\mathrm{Hom}_R(M,k) \cong \mathrm{Hom}_R(R^n,k)$. Se $\mathrm{Ext}^1_R(M,k) = 0$, então $0 = \mathrm{Hom}_R(Q,k) = \mathrm{Hom}_k(Q \otimes_R k,k)$, segue que $Q \otimes_R k = Q/\mathfrak{m}Q = 0$, e finalmente $Q = 0$ pelo Lema do Nakayama. Portanto $M \cong R^n$. ■

**Proposição 2.10.3** Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local e Noetheriano, e se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, então são equivalentes:

1. $\mathrm{pdim}_R(M) \leqslant n$;
2. $\mathrm{Ext}^i_R(M,k) = 0, \forall\, i > n$;
3. $\mathrm{Tor}^R_i(M,k) = 0, \forall\, i > n$

*Demonstração.* As provas de $(2) \Leftarrow (1) \Rightarrow (3)$ são diretas.

Provemos $(2)$ ou $(3)$ implica $(1)$. Como $M$ é fintamente gerado, então podemos encontrar uma sequência exata

$$L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$$

com $L_i$ livres finitamente gerados sobre $R$. Seja $L_n = \mathrm{Ker}(L_{n-1} \to L_{n-2})$. Pelo Lema 2.8.4, temos

$$\mathrm{Ext}^1_R(L_n,k) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,k) \quad \text{e} \quad \mathrm{Tor}^R_1(L_n,k) \cong \mathrm{Tor}^R_{n+1}(M,k).$$

Agora por hipotese temos $\mathrm{Ext}^1_R(L_n,k) = \mathrm{Tor}^R_1(L_n,k) = 0$, então, pelo Lema 2.10.2, $L_n$ é um $R$-módulo livre. ■

Deste Teorema 2.10.1, segue a seguinte proposição, cuja demonstração é feita de maneira análoga aos resultados anteriores.

ro pre-requisito⟩ **Proposição 2.10.4** Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local e Noetheriano, e se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, então são equivalentes:

**(i)** $\mathrm{pdim}_R(M) \leqslant n$;
**(ii)** $\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0, \forall\, i > n$ e para qualquer $R$-módulo $N$;
**(iii)** $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M,k) = 0$.

A condição de $R$ ser um anel local pode ser retirada dessa Proposição 2.10.4.

⟨pdimtor⟩ **Corolário 2.10.5** Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local e Noetheriano, e se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, então temos que:

$$\mathrm{pdim}_R(M) = \sup\{i : \mathrm{Tor}^R_i(M,k) \neq 0\}.$$

**Proposição 2.10.6** Seja $R$ uma nel Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Assume que $0 \to M_1 \to R^n \to M \xrightarrow{\pi} 0$ é exata. Então $M$ é plano se e somente se $\mathrm{Ext}^1_R(M,K) = 0$

*Demonstração.* Como Ext é compatible com a localização, podemos assumir que $R$ é local, Corolário 2.5.8. Se $M$ é plano, então $M$ é livre, Lema 2.10.2, e portanto, $\mathrm{Ext}^(_R M, M_1) = 0$. Assumamos que $\mathrm{Ext}^(_R M, M_1) = 0$. Temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,R^n) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_R(M,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,M_1) = 0.$$

Em particular, $Id_M \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$ tem uma contra imagens $i \in \mathrm{Hom}_R(M,R^p)$, que é, $\pi : R^n \to M$ tem uma seção $i : M \to R^n$ satisfazendo $\pi \circ i = Id_M$. Portanto, $M$ é um somando direto de $R^n$, logo $M$ é livre, e pelo Lema 2.10.2 $M$ é plano ■

**Corolário 2.10.7** Seja $R$ uma nel Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Assume que $0 \to M_1 \to R^n \to M \to 0$ é exata. Então

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_\mathfrak{p} \text{ e } R_\mathfrak{p} - \text{ plano } \} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \not\supset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^(_R M, M_1))\},$$

isto é, $\mathrm{Flat}(M) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^(_R M, M_1)))$.

## 2.10.1 Exercícios

⟨exer1.2⟩

1. Suponha $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de $R$-módulos. Então
$$\mathrm{pdim}_R(\oplus_{i\in I} M_i) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{pdim}_R(M_i) : i \in I\}$$

⟨exer2.2⟩

2. Seja $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to B \to 0$, uma sequência exata de $R$-módulos. Se $\mathrm{pdim}_R(P_j) \leq d$, para todo $j$, então $\mathrm{pdim}_R(P_j) \leq d+n$.
3. Suponha que $\mathfrak{F} : M_R \to M_S$ é um funtor exato, aditivo e covariante. Dado $B \in M_R$, temos que:
$$\mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(B)) \leq \mathrm{pdim}_R(B) + \mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(R)).$$
**Esqueleto da prova:** Consideremos primeiro o caso em que $B$ é um $R$-módulo livre. Então, neste caso, temos que $B = \bigoplus_\mathfrak{I} R$, para algum conjunto de índices $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{F}(B) = \bigoplus_\mathfrak{I} \mathfrak{F}(R)$, uma vez que $F$ é um funtor aditivo. Mas, $\mathrm{pdim}_R(\bigoplus_\mathfrak{I} \mathfrak{F}(R))$ é igual à $\mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(R))$ ou igual a zero se $\mathfrak{I}$ é vazio, pelo exrecício 1.
Agora, consideremos no caso em que $B$ é um $R$-módulo projetivo. Então, $B \oplus C$ é livre para algum $C$, e temos:
$$\mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(B)) \leq \mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(B) \oplus \mathfrak{F}(C)) = \mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(B \oplus C)) \leq \mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(R)),$$
de acordo com o primeiro caso.
Finalmente, considere $B$ um $R$-módulo arbitrário. Se $\mathrm{pdim}_R(B) = \infty$, não há nada o que provar. Assim, suponha que $\mathrm{pdim}_R(B) = n < \infty$. Seja então,
$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to B \to 0,$$
uma resolução projetiva de $B$. Então, segue que:
$$0 \to \mathfrak{F}(P_n) \to \mathfrak{F}(P_{n-1}) \to \ldots \to \mathfrak{F}(P_0) \to F(B) \to 0,$$

é uma sequência exata, uma vez que estamos assumindo que $F$ é um funtor exato. Sendo assim, temos que

$$\mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(B)) \leq n+d,$$

onde $d = \mathrm{pdim}_S(\mathfrak{F}(R))$, pelo Exrecício 2, e pelo segundo caso, que foi feito anteriormente.

Desta forma, conseguimos obter a desigualdade em questão.

4. Se $R$ é um anel comutativo e não trivial e $S \subseteq R$ é um conjunto multiplicativamente fechado de $R$, então

$$\mathrm{pdim}_{S^{-1}R}\left(S^{-1}M\right) \leq \mathrm{pdim}_R(M),$$

para qualquer $R$-módulo $M$ que é dado (use o Exrecício anterior).

5. Se $(R,m)$ é um anel comutativo Noetheriano local, então qualquer $R$-módulo projetivo finitamente gerado é livre.

Demonstração: Seja $P$ um $R$-módulo finitamente gerado, e seja $n$ o seu número minimo de geradores. Então temos uma sequência exata curta $0 \to K \to R^n \to P \to 0$. Como $P$ é projetivo,$R^n = K \oplus P$, e então $(R/\mathfrak{m})^n = K/\mathfrak{m} \oplus P/\mathfrak{m}$ são espaços vetoriais sobre $R/\mathfrak{m}$. Pelo cálculo de dimensão, $K/\mathfrak{m}K$ tem dimensão 0, e como $K$ é finitamente gerado, pelo Lema de Nakayama segue que $K = 0$.

# Parte III

# 3. Complexo de Koszul e anéis regulares

Neste capítulo, $(R,\mathfrak{m},k)$ será sempre um anel Noetheriano e local onde $\mathfrak{m}$ é um ideal local e $k = R/\mathfrak{m}$ o corpo residual, a menos que se diga o contrário. Faremos uma introdução do complexo de Koszul e suas conexões, tais com com anéis regulares e invariantes topológicos.

## 3.1 Resolução livre minimal

Antes de introducir o conceito de resoluçcão livre minimal, relembraremos algumas definições e posteriormente faremos algumas propriedades sobre resoluções livres minimais para $R$-módulos finitamente gerados.

### 3.1.1 Lembrando-Definições

⟨cidade alta 3⟩ **Definição 3.1.1** Seja $M$ um $R$-módulo. Dizemos que $x \in R$ é um elemento $M$-regular (ou um elemento regular sobre $M$) se $x$ **não é um divisor de zero** em $M$, ou seja, se para qualquer $m \in M$, $m \neq 0$, temos que $xm \neq 0$, além disso, $xM \neq M$. Caso contrário dizemos que $x$ **é um divisor de zero** em $M$. Se $M = R$, dizemos apenas que o elemento $x$ é regular, caso contrário $x$ é não regular.

**Definição 3.1.2** Sejam $x_1,\ldots,x_s \in R$ e $M$ um $R$-módulo. Dizemos que $x_1,\ldots,x_s$ é uma sequência $M$-regular (ou uma sequência regular sobre $M$, ou uma $M$-sequência) se:

**(1)** $x_1$ é $M$-regular;

**(2)** $x_i$ é não divisor de zero em $\dfrac{M}{(x_1,\ldots,x_{i-1})M}$ para cada $i = 2,3,\ldots s$;

**(3)** $(x_1,\ldots,x_s)M \neq M$.

Quando $M = R$, dizemos apenas que $x_1,\ldots,x_s$ é uma sequência regular.

Se $I$ for um ideal de $R$ e $x_1,\ldots,x_s \in I$, então nós chamamos $x_1,\ldots,x_s$ uma seqüência regular de $M$ em $I$. Se $M = R$, chamamos $x_1,\ldots,x_s$ simplesmente uma sequência regular

em $I$.

A seguir, apresentamos um exemplo.

**Exemplo 3.1.3** Seja $R = \dfrac{\mathbb{Q}[x,y]}{(xy)}$. Temos que $P = xR = (\overline{x})$ é um ideal primo, pois $\dfrac{R}{P}$ é domínio.

Tome $M = \dfrac{R}{P} \cong \mathbb{Q}[y]$, e então $y$ não é um divisor de zero em $M$, mas é em $R$. Além disso, $M \neq yM$. Logo, $y$ é uma sequência regular em $M$ (ou, neste caso, um elemento $M$-regular, de acordo com a Definição 3.1.1), mas não é em $R$.

### 3.1.2 Construção de resolução livre

Antes de mostrar a existência de resoluções livres minimais, precisamos o seguinte lema.

**Lema 3.1.4** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e seja $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado. Então

$$\mu(M) := \{\text{número mínimo de geradores de } M\} = \dim_k\left(\frac{M}{\mathfrak{m}M}\right) < \infty.$$

*Demosntração.* A finitude de $\dim_k\left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right)$ segue do fato de que $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado.

A última igualdade segue do Lema de Nakayama, da seguinte forma:

Seja $M = \langle w_1,\ldots,w_n\rangle$, onde $X = \{w_1,\ldots,w_n\}$ é um conjunto gerador de $M$ que é minimal.

Dado $\overline{w} = w + \mathfrak{m}M \in \dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$ $(w \in M)$, temos

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \mathfrak{m}M = \sum_{i=1}^{n}(a_i w_i + \mathfrak{m}M) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + \mathfrak{m}R)\cdot(w_i + \mathfrak{m}M),$$

onde $a_i + \mathfrak{m}R \in \dfrac{R}{\mathfrak{m}} = k$, e $w_i + \mathfrak{m}M \in \dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$, $\forall\, i = 1,\ldots,n$.

Assim, $\{\overline{w_1},\ldots,\overline{w_n}\} = \{w_1 + \mathfrak{m}M,\ldots,w_n + \mathfrak{m}M\}$ é um conjunto de geradores para o $k$-espaço vetorial $\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$. Logo, $\dim_k\left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right) \leqslant n$.

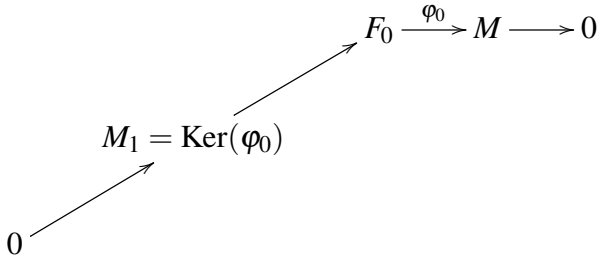
De fato, temos a igualdade na última expressão, pois caso contrário, se $\{x_1,\ldots,x_t\} \subseteq \{w_1,\ldots,w_n\}$ é tal que $t < n$ e $\langle\overline{x_1},\ldots,\overline{x_t}\rangle = \dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$, então temos que:

$$M \subseteq \langle x_1,\ldots,x_t\rangle + \mathfrak{m}M.$$

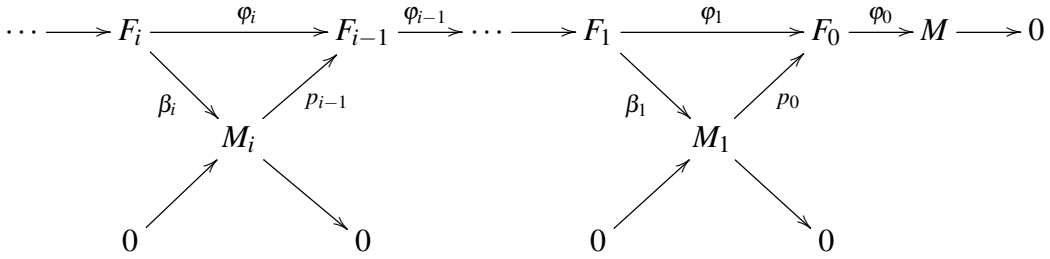
Como $\langle x_1,\ldots,x_t\rangle + \mathfrak{m}M \subseteq M$, segue que $M = \langle x_1,\ldots,x_t\rangle + \mathfrak{m}M$. Pelo Lema de Nakayama, temos $M = \langle x_1,\ldots,x_t\rangle$, o que é uma contradição, de acordo com a minimalidade de $n$. Portanto, $n = \dim_k\left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right)$, como desejado. ■

Agora com isto, estamos prontos para construir uma resolução livre minimal. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel Noetheriano local, seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado e $b_0 = \dim_k\left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right) < \infty$. Já vimos que, pelo Lema de Nakayama, $M$ é gerado por $b_0$ elementos, $b_0$ é o número minimo de geradores de $M$, também denotado por $b_0 := \mu(M)$.

Considere o $R$-módulo livre $F_0 = R^{b_0}$ (observe que, nestas condições, $F_0$ é um $R$-módulo finitamente gerado) e a aplicação canônica $\varphi_0$ que leva cada elemento $e_i$, da base canônica de $F_0$, em um gerador de $M$, digamos $u_i$. Temos:




Como $R$ é Noetheriano e $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, segue que temos $M$ um $R$-módulo Noetheriano; e assim, sendo que $M_1$ é um $R$-submódulo de $M$, temos que $M_1$ é finitamente gerado (como um $R$-módulo). Repetindo esse processo, agora para os $M_i's$, temos




onde $M_i = \mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})$. Observe que esta sequência é exata, pois $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \varphi_i(F_i) = (p_{i-1} \circ \beta_i)(F_i) = p_{i-1}(\beta_i(F_i)) = p_{i-1}(M_i) = M_i = \mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})$.

Com isto construimos uma resolução

$$\mathbf{F}_{\bullet,M}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0,$$

os $F_i$ são $R$-módumos livres. Isto mos motiva a definir.

**Definição 3.1.5** Seja $M$ um $R$-módulo, uma **resolução livre** de $M$ é um complexo

$$\mathbf{F}_{\bullet,M}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow 0,$$

onde os $F_i$ são $R$-módulos livres para cada $i \in \mathbb{Z}$ e

$$\mathbf{F}_{\bullet}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0,$$

é exata. A resolução $\mathbf{F}_{\bullet,M}$ é chamado **resolção livre minimal** se as apliações $\overline{\varphi_i} := \varphi_i \otimes \mathrm{id}_k : F_i \otimes R/\mathfrak{m} \to F_{i-1} \otimes R/\mathfrak{m}$ são nulas para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Observe que pelas construções feitas acima (lema de Nakayama) uma resolção livre minimal existe.

Lembre-se que, pelo Teorema 2.10.1, se $R$ é um anel Noetheriano local e $M$ é um $R$-módulo fintamente gerado, então

$$M \text{ é um } R\text{-módulo livre} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ é um } R\text{-módulo projetivo.}$$

Sendo assim, podemos calcular $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ tomando qualquer resolução livre de $M$, tensorizada por $N$, e então tomar a $i$-ésima homologia.

Logo, podemos encontrar $\operatorname{Tor}_i^R(M,k)$ tensorizando $\mathbf{F}_\bullet$ por $k$ e tomando a $i$-ésima homologia:

$$\mathbf{F}_\bullet \otimes k: \quad \cdots \longrightarrow F_i \otimes_R k = k^{b_i} \xrightarrow{\overline{\varphi_i}} \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_R k = k^{b_1} \xrightarrow{\overline{\varphi_1}} F_0 \otimes_R k = k^{b_0},$$

onde $b_i$ é o posto de $F_i$.

⟨minimal⟩ **Proposição 3.1.6** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel Noetheriano local e seja

$$\mathbf{F}_{\bullet,M}: \quad \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow 0,$$

uma resolução livre de um $R$-módulo $M$ finitamente gerado. Então as segunites afirmações são equivalentes:

**(1)** $\mathbf{F}_{\bullet,M}$ é uma resolução livre minimal;
**(2)** $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo $i \geqslant 1$;
**(3)** $\operatorname{Im}(\overline{\varphi_i}) = 0$, para todo $i \geqslant 1$;
**(4)** $\dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k) = \text{posto}(F_i) = b_i$, para todo $i \geqslant 1$.

*Demonstração.* **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**: É suficiente mostrar que $\varphi(F_1) \subseteq \mathfrak{m}F_0$ (os outros seguirão de maneira análoga). Note que, como a resolução livre é exata, temos:

$$\varphi_1(F_1) = \operatorname{Ker}(\varphi_0) = M_1.$$

**Afirmação:** $M_1 \subseteq \mathfrak{m}F_0$. Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Tensorizando por $k = \dfrac{R}{\mathfrak{m}}$, temos que:

$$\frac{M_1}{\mathfrak{m}M_1} \xrightarrow{\psi} \frac{F_0}{\mathfrak{m}F_0} \xrightarrow{\overline{\varphi_0}} \frac{M}{\mathfrak{m}M} \longrightarrow 0,$$

também é exata (uma vez que o produto tensorial é um funtor exato à direita).

Note que, como $F_0 = R^{b_0}$ e $\dim_k \left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right) = b_0 < \infty$, pelo Lemma de Nakayama $b_0$ é número minimo de geradores de $M$, temos que

$$\frac{F_0}{\mathfrak{m}F_0} \cong k^{b_0} \quad \text{e} \quad \frac{M}{\mathfrak{m}M} \cong k^{b_0}.$$

Logo, segue que $\overline{\varphi_0}$ é um isomorfismo, isto é,

$$\frac{F_0}{\mathfrak{m}F_0} \cong \frac{M}{\mathfrak{m}M},$$

e assim, $\operatorname{Im}(\psi) \subseteq \operatorname{Ker}(\overline{\varphi_0}) = 0$. Então, $M_1 \subseteq \mathfrak{m}F_0$.

**(1)** $\Leftrightarrow$ **(3)**: pela definição.
**(2)** $\Leftrightarrow$ **(3)**: a prova é direta.

**(3)** $\Rightarrow$ **(4)**: Primeiro consideremos a sequência exata curta de $k$-espaços vetoriais $0 \to \mathrm{Ker}(\overline{\varphi_i}) \to F_i/\mathfrak{m}F_i \to \mathrm{Im}(\overline{\varphi_i}) \to 0$ para mostrar que $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi_i}) \cong F_i/\mathfrak{m}F_i \cong k^{b_i}$, pois $\mathrm{Im}(\overline{\varphi_i}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Agora como

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,k) = \frac{\mathrm{Ker}\overline{\varphi_i}}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_{i+1}}} = \frac{\mathrm{Ker}\overline{\varphi_i}}{0} = k^{b_i}.$$

Logo,

$$\dim_k \mathrm{Tor}_i^R(M,k) = b_i.$$

**(4)** $\Rightarrow$ **(3)**: Se $\dim_k \mathrm{Tor}_i^R(M,k) = b_i$, então $\mathrm{Tor}_i^R(M,k) \cong k^{b_i}$. Logo, como este é um espaço vetorial de dimensão finita, temos $\dfrac{\mathrm{Ker}\overline{\varphi_i}}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_{i+1}}} \cong k^{b_i}$.

Como $\mathrm{Ker}\overline{\varphi_i} \subseteq k^{b_i}$, segue que $\mathrm{Im}\overline{\varphi_{i+1}} = 0$. Portanto, $\overline{\varphi_{i+1}} = 0$, para todo $i \geqslant 0$.
Em particular, os $b_i$'s são independentes da escolha da resolução livre minimal. ■

**Definição 3.1.7** Os $b_i$'s definidos acima (cada um deles é o posto dos $F_i$'s) são chamados de **números de Betti** de $M$, denotado por $\beta_i(M) = \mathrm{posto}(F_i) = b_i$.

A ideia de associar uma resolução para um $R$-módulo $M$ finitamente gerado foi introduzido nos famosos artigo de Hilbert [**Hilbert1**], [**Hilbert2**]. Desde então sabe se que: para obter propriedaes de $M$ pode ser estudado através da compreensão das propriedades e estrutura de uma resolução livre. A seguir, atravez de um exemplo, daremos um método de como construir uma resolução livre. De um ponto de vista moderno, a construção de uma resolução eleva-se a resolver sistemas de equações polinomiais repetidamente.

**Observação 3.1.8 — Construção de resolução projetiva.** Se temos um homomorfismo de $R$-módulos livres $R^p \xrightarrow{A} R^q$, onde $A$ é a matriz da aplicação com respeito a uma base fixa, então descrever $\mathrm{Ker}(A)$ é equivalente a resolver o sitemas de $R$-equações lineares

$$A \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = 0$$

sobre $R$, onde $Y_1, \ldots, Y_p$ são variáveis que têm valores em $R$.
**Construção**: Como cada $R$-módulo $M$ finitamente gerado tem uma resolução livre, definiremos as aplicações $\varphi_i$, por indução:
*Paso 0:* Seja $M_0 = M$, escolhamos os geradores $w_1, \ldots, w_n$ de $M$ e seja $F_0 = R^n$. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base de $F_0$, e defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi_0: & F_0 & \longrightarrow & M \\ & e_j & \mapsto & w_j \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n. \end{array}$$

*Paso i:* Por indução, $F_{i-1}$ e $\varphi_{i-1}$ são definidos. Seja $M_i = \mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})$. Escolhamos os geradores $x_1, \ldots, x_s$ de $M_i$ e seja $F_s = R^s$. Seja $g_1, \ldots, g_s$ uma base de $F_i$, e definamos

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i: & F_0 & \longrightarrow & M_i \subset F_{i-1} \\ & g_j & \mapsto & x_j \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq s. \end{array}$$

Por cosntrução $\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1}) = \mathrm{Im}(\varphi_i)$.

O processo descrito acima pode nunca terminar. Neste caso, teremos uma resolução livre infinita.

**Exemplo 3.1.9** Seja $R = k[x,y,z]$ uma anel de polinônios e $J = (x^2z, xyz, yz^6)$ um ideal de $R$. construiremos uma resolução livre de $R/J$.
*Paso 0:* Seja $F_0 = R$ e seja $\varphi_0 : R \to R/J$.
*Paso 1:* Os elementos $x^2z, xyz, yz^6$ são os geradores de $\mathrm{Ker}(\varphi_0)$. Denotemos por $e_1, e_2, e_3$ uma base de $F_1 = R^3$. Definamos $\varphi_1$ por

$$e_1 \mapsto x^2z, \quad e_2 \mapsto xyz, \quad e_3 \mapsto yz^6,$$

temos a resolução inicial

$$F_1 = R^3 \xrightarrow{\left(x^2z, xyz, yz^6\right)} F_0 = R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0,$$

*Paso 2:*Seguindo, agora precisamos encontrar os geradores de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$, isto é equivalente a resolver a equação $\varphi_1(X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3) = 0$, ou

$$X_1x^2z + X_2xyz + X_3yz^6 = 0$$

onde $X_1, X_2, X_3$ são indeterminadas que tem valores em $R$. Usando sistema computacional SINGULAR, encontramos que $-e_1y + xe_2$ e $-z^5e_2 + xe_3$ são geradores de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$. Denotemos bor $g_1, g_2$ uma base para $F_2 = R^2$. Definamos $\varphi_2$ por

$$g_1 \mapsto -e_1y + xe_2, \quad g_2 \mapsto -z^5e_2 + xe_3,$$

obtemos a proxima resolução

$$F_2 = R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -z^5 \\ 0 & x \end{pmatrix}} F_1 = R^3 \xrightarrow{(x^2z, xyz, yz^6)} F_0 = R$$

*Paso 3:*. Seguimos, precisamos achar os geradores de $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$, equivalentemente temos que resolver $\varphi_2(Y_1g_1 + Y_2g_2) = 0$, então temos o eguinte sitema

$$\begin{aligned} -Y_1y &= 0 \\ Y_1x - Y_2z^5 &= 0 \\ Y_2x &= 0 \end{aligned}$$

onde $Y_1, Y_2$ são indeterminadas que tem valores em $R$. Claramente, a solução é $Y_1 = Y_2 = 0$, então $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = 0$. Assim temos a resolução livre

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -z^5 \\ 0 & x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{(x^2z, xyz, yz^6)} R \to R/J \to 0.$$

**Exemplo 3.1.10** Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano e local e $x \in \mathfrak{m}$. Então, $x$ é um elemento regular se, e somente se, $\mathrm{pdim}_R\left(\frac{R}{xR}\right) = 1$.

De fato: ($\Rightarrow$) Considere

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi) \longrightarrow R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{xR} \longrightarrow 0$$

e como $x$ é regular, $\mathrm{Ker}(\pi) \cong xR \neq 0$. Note que $R$ é sempre livre e, como $R$ é Noetheriano, $\mathrm{Ker}(\pi)$ é finitamente gerado e tem um gerador, então pela construção de resolução projetiva para módulos finitamente gerados, obteremos uma resolução livre, tal que

$$\mathrm{pdim}_R\left(\frac{R}{xR}\right) \leqslant 1.$$

Note que vale, de fato, a igualdade, pois: se $\mathrm{pdim}_R\left(\frac{R}{xR}\right) = 0$, teríamos que $\frac{R}{xR}$ é projetivo/livre e então $\frac{R}{xR} \cong R$. Logo, $xR = 0$, o que é uma contradição.

($\Leftarrow$) Suponha que $x$ não é regular, isto é, $xR = 0$. Assim, $\frac{R}{xR} \cong R$ e então

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \frac{R}{xR} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $R$. Logo, $\mathrm{pdim}_R\left(\frac{R}{xR}\right) = 0$, o que é uma contradição.

### 3.1.3 Exercícios

1. Mostre que as resoluções livres minimais são únicas a menos de isomorfismos.
2. Calcule uma resolução minimal para o ideal $I = (x^2, y^2, xy + yz)$ de $k[x,y,z]$.

## 3.2 Complexo de Koszul

O cone pode ser definido na categoria de complexos sobre qualquer categoria de aditivos (isto é, uma categoria cuja morphisms formar grupos abelianos e em que podemos construir uma soma directa de quaisquer dois objectos).

⟨aplicone⟩ **Aplicação cone**: Considere dois complexo de $R$-módulos com diferenciais $d^{C_\bullet}$ e $d^{D_\bullet}$ isto é:

$$C_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d^C_{n+1}} C_n \xrightarrow{d^C_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$D_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d^D_{n+1}} D_n \xrightarrow{d^D_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots.$$

Seja $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ uma aplicação de complexos, definamos o cone, frequêntemente denotado por $\mathrm{Cone}(f_\bullet)$ ou $C(C_\bullet \to D_\bullet)$, será o seguinte complexo

$$C(f_\bullet) := D_\bullet \oplus C_\bullet[-1] = \quad \cdots \longrightarrow D_n \oplus C_{n-1} \longrightarrow D_{n-1} \oplus C_{n-2} \longrightarrow D_{n-2} \oplus C_{n-3} \longrightarrow \cdots$$

com diferêncial $d^{C(f_\bullet)} = \begin{pmatrix} d^{D_\bullet} & f_\bullet[-1] \\ 0 & d^{C_\bullet[-1]} \end{pmatrix}$ agindo nos vetores colunas. Aqui $C_\bullet[-1]$ é um complexo com componente $[C[-1]]_n = C_{n-1}$ e $d_n^{C_\bullet[-1]} = -d^{C_\bullet}_{n-1}$. Assim o diferencial de $C(f_\bullet)$ é definido por

$$d_n^{C(f_\bullet)}(\alpha_{n-1},\beta_n)=\begin{pmatrix} d^{D_\bullet} & f_\bullet[-1] \\ 0 & d^{C_\bullet}[-1] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}=(-f_{n-1}(\alpha_{n-1})+d_n^{D_\bullet}(\beta_n),-d_{n-1}^{C_\bullet}(\alpha_{n-1})).$$

?⟨cone⟩? **Proposição 3.2.1** Seja $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ uma aplicação de complexos de $R$-módulos. Então existe uma sequência exata de complexos

$$0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} C(f_\bullet) \xrightarrow{\beta_\bullet} C_\bullet[-1] \longrightarrow 0,$$

onde $\alpha : c \to (0,c)$ e $\beta : (a,c) \to -a$. O homomorfismo conectante $H_n(C_\bullet[-1]) \to H_{n-1}(D_\bullet)$ na correspondente sequência exata longa de homologias é inducido pela aplicação $f_{\bullet *} : H_{n-1}(C_\bullet) \to H_{n-1}(D_\bullet)$

*Demonstração.* A exatitude do complexo seque pelo fato que, para cada $n$

$$0 \longrightarrow D_n \xrightarrow{\alpha} D_n \oplus C_{n-1} \xrightarrow{\beta} C_{n-1} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. ■

**Produto Tensorial de complexos:** Consideremos dois complexos de $R$-módulos:
roductocomplex⟩?

$$C_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^C} C_n \xrightarrow{d_n^C} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$D_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^D} D_n \xrightarrow{d_n^D} D_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Observe que um complexo ou cocomplexo pode ser pensado como um $R$-módulo graduado da seguinte forma $C_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$, com um **endomorfismo** $d : C_\bullet \to C_\bullet$ de grau $-1$, onde $d^2 \equiv 0$.

Sendo assim, podemos definir o produto tensorial de dois complexos de $R$-módulos como segue: $(C_\bullet, d^{C_\bullet}) \bigotimes (D_\bullet, d^{D_\bullet})$ é um complexo de cadeias com o $n$-ésimo componente dado por

$$\bigoplus_{i+j=n} (C_i \otimes_R D_j),$$

e um endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} C_i \otimes_R D_j & \xrightarrow{\delta_{i+j}} & (C_{i-1}\otimes_R D_j)\oplus(C_i \otimes_R D_{j-1}) \\ x\otimes y & \mapsto & (d_i^{C_\bullet}(x)\otimes y)\oplus((-1)^i x \otimes d_j^{D_\bullet}(y)). \end{array}$$

tal que $\delta_{i+j-1}\circ\delta_{i+j}=0$.

### 3.2.1 Primeira construção do Complexo de Koszul

A seguir, apresentamos a seguinte definição.

**Definição 3.2.2** Para $x \in R$, defina o **complexo de Koszul** como sendo o seguinte complexo de cadeias:

$$K_\bullet(x;R): \quad 0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{\cdot x} R_0 \longrightarrow 0,$$

onde $R_0$ e $R_1$ são o próprio anel $R$ (os índices são apenas para observar o grau de homologia).

⟨obs regular⟩

**Observação 3.2.3**

1. $K_\bullet(x;R)$ só é exato, se $x$ for um elemento regular (ou seja, um elemento regular sobre o $R$-módulo $R$), pois $x$ é regular se, e somente se, $R \xrightarrow{\cdot x} R$ é um $R$-homomorfismo **injetor**.
2. Seja $C_\bullet$ um complexo de $R$-módulos, calculemos o produto tensorial de $C_\bullet$ com $K_\bullet(x;R)$ que denotaremos por $C_\bullet(x)$, isto é $C_\bullet(x) := C_\bullet \otimes K_\bullet(x;R)$. Então, a $n$-ésima componente deste complexo, temos que:

$$[C_\bullet(x)]_n = (C_{n-1} \otimes_R R_1) \oplus (C_n \otimes_R R_0) = C_{n-1} \oplus C_n.$$

A aplicação $\delta_n : [C_\bullet(x)]_n \to [C_\bullet(x)]_{n-1}$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \delta_n: & C_{n-1} \oplus C_n & \longrightarrow & C_{n-2} \oplus C_{n-1} \\ & (\alpha_{n-1}, \alpha_n) & \mapsto & (d^{C_\bullet}_{n-1}(\alpha_{n-1}) + (-1)^{n-1} x \alpha_{n-1}, d^{C_\bullet}_n(\alpha_n)) \end{array}$$

pois,

$$\begin{array}{rccl} \overline{\delta_{n-1}}: & C_{n-1} \cong C_{n-1} \otimes_R R_1 & \longrightarrow & (C_{n-2} \otimes_R R_1) \oplus (C_{n-1} \otimes_R R_0) \cong C_{n-2} \oplus C_{n-1} \\ & \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1} \otimes 1 & \mapsto & (d^{C_\bullet}_{n-1}(\alpha_{n-1}) \otimes 1) \oplus ((-1)^{n-1} \alpha_{n-1} \otimes x) \\ & & = & (d^{C_\bullet}_{n-1}(\alpha_{n-1}) + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \overline{\delta_n}: & C_n \cong C_n \otimes_R R_0 & \longrightarrow & (C_{n-1} \otimes_R R_0) \oplus (C_n \otimes_R 0) \cong C_{n-1} \\ & \alpha_n = \alpha_n \otimes 1 & \mapsto & (d^{C_\bullet}_n(\alpha_n) \otimes 1) = d^{C_\bullet}_n(\alpha_n) \end{array}$$

Dessa forma, temos uma sequência exata curta de complexos:

$$0 \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow C_\bullet(x) \longrightarrow C_\bullet(-1) \longrightarrow 0.$$

3. Existe uma sequência exata longa de homologias

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_n(C_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_n(C_\bullet(x)) \longrightarrow \mathrm{H}_n(C_\bullet(-1)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots,$$

onde $\delta$ é o $R$-**homomorfismo conectante** dado, neste caso, pela multiplicação por $x$. Para obter este homomorfismo conectante, segundo o lema da serpente é obtido como segue: Seja $z \in C_{n-1}$ com $d^{C_\bullet}_{n-1}(z) = 0$, então

$$z \xrightarrow{\beta^{-1}} (z,0) \xrightarrow{\delta_n} (0, (-1)^{n-1} xz) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (-1)^{n-1} xz$$

Note que

$$\mathrm{H}_n(C_\bullet(-1)) \cong \mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet)$$

e então, temos uma sequência

$$\cdots \xrightarrow{\cdot x} \mathrm{H}_n(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}_n(C_\bullet(x)) \xrightarrow{\psi} \mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\cdot(-1)^{n-1}x} \mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots. \quad (3.1)$$ equationlonga

4. A sequência exata longa pode ser quebrada em sequências exatas curtas da forma:

?⟨equation⟩?

$$0 \to \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathrm{H}_n(C_\bullet(x)) \to \mathrm{Im}(\psi) \to 0$$

e pelo teorema de ismorfismo e pela sequência exata longa temos $\mathrm{H}_n(C_\bullet)/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$, e como $\mathrm{Im}(\cdot x) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\cdot x) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet)}(x)$ , temos

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{H}_n(C_\bullet)}{x\mathrm{H}_n(C_\bullet)} \longrightarrow \mathrm{H}_n(C_\bullet \otimes K_\bullet(x;R)) \longrightarrow \mathrm{Ann}_{\mathrm{H}_{n-1}(C_\bullet)}(x) \longrightarrow 0. \qquad (3.2)$$ Eq*

5. Observe que $x\mathrm{H}_n(C_\bullet \otimes K_\bullet(x;R)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato seja $(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ um representante de um elemento em $\mathrm{H}_n(C_\bullet \otimes K_\bullet(x;R))$, isto é,

$$\delta_n(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = (d^{C_\bullet}_{n-1}(\alpha_{n-1}), (-1)^{n-1}x\alpha_{n-1} + d^{C_\bullet}_n(\alpha_n)) = (0,0).$$

Daqui temos $d^{C_\bullet}_n(\alpha_n) = (-1)^n x\alpha_{n-1}$.
Mas, como

$$\delta_{n+1}(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = (d^{C_\bullet}_n(\alpha_n), (-1)^n x\alpha_n + d^{C_\bullet}_{n+1}(\alpha_{n+1}))$$

temos que

$$x.(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = (x\alpha_{n-1}, x\alpha_n) = \delta_{n+1}((-1)^n\alpha_n, 0)$$

$x.(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = 0 \bmod \mathrm{Im}(\delta_{n+1})$.

⟨tensorkoszul⟩ **Definição 3.2.4** Sejam $x_1, \ldots, x_n \in R$ e seja $M$ um $R$-módulo. O complexo de Koszul é definido, indutivamente, como sendo:

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M) := K_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}; M) \otimes K_\bullet(x_n; R),$$

onde $K_\bullet(x; M) := K_\bullet(x; R) \otimes M$.

⟨idade alta 1001⟩ **Observação 3.2.5**

1. Observe que, o complexo de Koszul pode ser calculado usando a observação anterior 3.2 e o produto tensorial de complexos induticamente.
2. Com a Definição 3.2.4 e a observação 3.2.1 item 2 temos, se $C_\bullet = K_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}; R)$, então

$$\begin{aligned} K_i(x_1, \ldots, x_n; R) &= K_i(x_1, \ldots, x_{n-1}; R) \otimes K_\bullet(x_n; R) \\ &= K_{i-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; R) \oplus K_i(x_1, \ldots, x_{n-1}; R), \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. Observe também este ultimo também define o complexo cone $C(K_\bullet(x'; R) \xrightarrow{x_n} K_\bullet(x'; R))$.

⟨Prop3.2.2⟩ **Proposição 3.2.6** Para cada $i$, a $i$-ésima componente de $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$ é isomorfo a $R^{\binom{n}{i}}$, isto é, $K_i(x_1, \ldots, x_n; R) \cong R^{\binom{n}{i}}$. Em particular temos que $K_i(x_1, \ldots, x_n; M) \cong M^{\binom{n}{i}}$.

*Demonstração.* Procederemos por indução sobre $n$. No caso $n = 1$. O complexo de Koszul é seguinte sequência

$$K_\bullet(x_1; R): \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x_1} R \longrightarrow 0,$$

vemos desta sequência que cada componente $K_\bullet(x_1; R)$ é isomorfo a $R^{\binom{n}{i}}$ para $i = 0, 1$

$$K_0(x_1; R) = R \cong R^{\binom{1}{0}}$$

$$K_1(x_1;R) = R \cong R^{\binom{1}{1}}.$$

Paso indutivo: Asumamos que o resultado é verdade para $K_i(x_1,\ldots,x_{n-1};R)$. Agora pela Observação 3.2.5

$$\begin{aligned} K_i(x_1,\ldots,x_n;R) &= K_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1};R) \oplus K_i(x_1,\ldots,x_{n-1};R) \\ &= R^{\binom{n-1}{i}} \oplus R^{\binom{n-1}{i-1}} \\ &= R^{\binom{n}{i}} \end{aligned}$$

portanto vale o resultado desejado. ■

**Observação 3.2.7** Visto então o que foi feito anteriormente, temos que:

$$K_\bullet(x_1;M): \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x_1} M \longrightarrow 0,$$

e além disso,

$$K_\bullet(x_1,x_2;M) = K_\bullet(x_1;M) \otimes K_\bullet(x_2;M): \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}} M \oplus M \xrightarrow{d_1=(x_2,x_1)} M \longrightarrow 0,$$

onde

$$d_1(m_1,m_2) = x_1m_1 + x_2m_2 \quad \text{e} \quad d_2(m) = (x_1m, -x_2m).$$

E, além do mais:

$$K_\bullet(x_1,\ldots,x_n;M): \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_n=\begin{pmatrix} \pm x_n \\ -\pm x_{n-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}\pm x_1 \end{pmatrix}} M^{\binom{n}{1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{(x_1,\ldots,x_n)} M \longrightarrow 0.$$

Com motivo de estas observações, a partir de agora, denotaremos $\mathrm{H}_i(K_\bullet(x_1,\ldots,x_n;M))$ apenas por $\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;M)$.

**Exemplo 3.2.8** Seja $R = k[x,y,z]$ e $I = (x,y,z)$ o ideal de $R$. Então

$$K_\bullet(x,y,z;R): \ 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{(x\,y\,z)} R \longrightarrow R/I \to 0.$$

⟨Obs3.2.4⟩ ⟨ul outro metodo⟩ **Observação 3.2.9** (**[Complexo de Koszul com um elemento]**) Seja $M$ um $R$-módulo e $x$ é um elemento de $R$, considere a aplicação homotetia (isto é, a aplicação multiplicação) $M \xrightarrow{\cdot x} M$. Por definição, temos que:

$$\mathrm{Ker}\left(M \xrightarrow{\cdot x} M\right) = \{m \in M \mid xm = 0\} = (0 :_M x),$$

e assim esta aplicação é injetiva se, e somente se, $x$ é fracamente $M$-regular, isto é, $x$ é um não divisor de zero sobre $M$ (ou deja, para todo $m \neq 0$ em $M$, temos que $xm \neq 0$). Além disso, temos que:

$$\mathrm{Im}\left(M \xrightarrow{\cdot x} M\right) = xM \ \text{ e } \ \mathrm{Coker}\left(M \xrightarrow{\cdot x} M\right) = M/xM,$$

e assim, a sobrejetividade desta aplicação está relacionada ao fato de que devemos ter $xM = M$.

Vamos obter um complexo de cadeias, concentrado em graus 0 e 1:

$$\mathrm{K}_\bullet(x;M) : 0 \to M \xrightarrow{\cdot x} M \to 0.$$

Este é o complexo de Koszul sobre $x \in R$ com coeficientes em $M$.

Desta meneira, conseguimos verificar diretamente os seguintes isomorfismos com relação ao módulo de homologia deste complexo:

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{K}_\bullet(x;M)) \cong M/xM,$$

e

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{K}_\bullet(x;M)) \cong (0 :_M x) = \mathrm{Ker}\left(M \xrightarrow{\cdot x} M\right).$$

Portanto, $x$ é $M$-regular se, e somente se, $\mathrm{H}_0(\mathrm{K}_\bullet(x;M)) \neq 0$ e $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}_\bullet(x;M)) = 0$.

⟨koszulanulation⟩ **Proposição 3.2.10** Seja $R$ um anel, $M$ um $R$-módulo e $x_1,\ldots,x_n \in R$.

1. Seja $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\underline{x}' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$, então existe uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}_i(\underline{x}',M) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{x},M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{x}',M) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}_{i-1}(\underline{x}',M) \longrightarrow \cdots.$$

2. $(x_1,\ldots,x_n)H_i(x_1,\ldots,x_n,M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

*Demonstração.* O item (1) é direto da sequência exata longa 3.1.

O item (2) segue da Observação 3.2.1 item (5). ■

**Observação 3.2.11** Seja $M$ um $R$-módulo. Sabemos que se $\mathrm{Ann}_R(M)$ é o anulador de $M$, então $M$ é também um $R/\mathrm{Ann}_R(M)$-módulo. Se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado onde $R$ é Artiniano, então $M$ tem comprimento finto sobre $R$. Para mostrar isto é suficiente considerar a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

daqui temos que, desde que $R^n$ é Atiniano, $M$ é artiniano. Portanto tem comprimento finto.

Em particular, da proposição 3.2.10 item (2) temos: Se $(x_1,\ldots,x_n)$ for um ideal $\mathfrak{m}$-primário, então $H_i(x_1,\ldots,x_n,M)$ tem comprimento finito para todo $i \in \mathbb{Z}$.

livro de huneke⟩ **Teorema 3.2.12** Seja $R$ um anel **comutativo e não trivial**, $x_1,\ldots,x_n \in R$ e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então

1. $\mathrm{H}_0(x_1,\ldots,x_n;M) \cong \dfrac{M}{(x_1,\ldots,x_n)M}$;
2. $\mathrm{H}_n(x_1,\ldots,x_n;M) \cong \mathrm{Ann}_M(x_1,\ldots,x_n)$;
3. Se $x_1,\ldots,x_n$ é uma sequência regular em $M$, então temos:

$$\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;M) = 0, \quad \forall\, i \geqslant 1;$$

4. Se $R$ é Noetheriano e $\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;M) = 0$, $\forall\, i \geqslant 1$, e $x_1,\ldots,x_n \in \mathrm{Jac}(R)$ (radical de Jacobson de $R$), então $x_1,\ldots,x_n$ é uma sequência regular em $M$.

*Demonstração.* Vamos provar os itens (1) e (2): Como vimos na Proposição 3.2.6, temos que:

$$K_\bullet(x_1,\ldots,x_n;M):\quad 0\longrightarrow M \xrightarrow{d_n=\begin{pmatrix} \pm x_n \\ -\pm x_{n-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}\pm x_n \end{pmatrix}} M^{\binom{n}{1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{d_1=(x_1,\ldots,x_n)} M\longrightarrow 0,$$

e assim segue das definições de $d_1$, $d_n$ e dos $R$-módulos de homologia que

$$\mathrm{H}_0(x_1,\ldots,x_n;M)=\frac{\mathrm{Ker}(M\to 0)}{\mathrm{Im}(d_1)}\cong\frac{M}{(x_1,\ldots,x_n)M}$$

e

$$\mathrm{H}_n(x_1,\ldots,x_n;M)=\frac{\mathrm{Ker}(d_n)}{\mathrm{Im}(0\to \mathrm{M})}\cong\frac{\mathrm{Ann}_M(x_1,\ldots,x_n)}{0}\cong\mathrm{Ann}_M(x_1,\ldots,x_n).$$

Para o item (3), vamos fazer por indução sobre $n$. Para $n=1$, temos que $x_1$ é regular em $M$ se, e somente se, o complexo de cadeias

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\cdot x_1} M\longrightarrow 0$$

é exato. Isto é equivalente a dizer que $\mathrm{H}_1(x_1;M)=0$, pela Observação 3.2.9.

Para $n>1$, seja $C_\bullet=K_\bullet(x_1,\ldots,x_{n-1};M)$. Por hipótese de indução, temos que $\mathrm{H}_i(C_\bullet)=0$, $\forall\, i\geqslant 1$. Aplicando (3.2) da Observação 3.2.1 item (4) com $n=i$ e $x=x_n$, temos

$$0\longrightarrow\frac{\mathrm{H}_i(C_\bullet)}{x_n\mathrm{H}_i(C_\bullet)}\longrightarrow\mathrm{H}_i(C_\bullet\otimes K_\bullet(x_n;R))\longrightarrow\mathrm{ann}_{\mathrm{H}_{i-1}(C_\bullet)}(x_n)\longrightarrow 0$$

e assim temos:

$$\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;M)=\mathrm{H}_i(C_\bullet\otimes K_\bullet(x_n;R))\cong\frac{\mathrm{H}_i(C_\bullet)}{x_n\mathrm{H}_i(C_\bullet)}=0,\quad\forall\, i\geqslant 2.$$

Se $i=1$ temos, por hipótese de indução e pelo fato de $x_n$ não ser divisor de zero em $\dfrac{M}{(x_1,\ldots,x_{n-1})M}=\mathrm{H}_0(C_\bullet)$, temos que

$$0\longrightarrow\frac{\mathrm{H}_1(C_\bullet)}{x_n\mathrm{H}_1(C_\bullet)}=0\longrightarrow\mathrm{H}_1(C_\bullet\otimes K_\bullet(x_n;R))\longrightarrow\mathrm{ann}_{\mathrm{H}_0(C_\bullet)}(x_n)=0\longrightarrow 0.$$

Logo, $\mathrm{H}_1(x_1,\ldots,x_n;M)=\mathrm{H}_1(C_\bullet\otimes K_\bullet(x_n;R))=0$, completando a prova de (3).

Agora, vamos fazer o item (4). Novamente, faremos por indução sobre $n$. Para $n=1$, o resultado segue pela recíproca do que foi feito no caso $n=1$ do ítem (3). Suponha, agora, que $n>1$ seja verdadedeira e novamente tome $C_\bullet=K_\bullet(x_1,\ldots,x_{n-1};M)$. Note que, por (3.2) da Observação 3.2.1 item (4) (como $\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;M)=0,\forall\, i\geqslant 1$), temos

(i) $\dfrac{\mathrm{H}_i(C_\bullet)}{x_n\mathrm{H}_i(C_\bullet)}=0,\ \forall\, i\geqslant 1$;

(ii) $\mathrm{Ann}_{\mathrm{H}_0(C_\bullet)}(x_n)=0$.

Como $R$ é, pela hipótese, um anel Noetheriano, $M$ é **finitamente gerado** e $\mathrm{H}_i(C_\bullet)$ é um quociente de submódulos de $M$ (consequentemente, eles são finitamente gerados),

seque que $\mathrm{H}_i(C_\bullet)$ é finitamente gerado. Agora, por hipótese, $x_n \in \mathrm{Jac}(R)$ e então de $(i)$ e pelo Lema de Nakayama, segue que $\mathrm{H}_i(C_\bullet) = 0$.

Por hipótese de indução, temos que $x_1, \ldots, x_{n-1}$ é uma sequência regular em $M$. Agora, de $(ii)$, concluímos que $x_n$ não é um divisor de zero em $\mathrm{H}_0(C_\bullet) = \dfrac{M}{(x_1, \ldots, x_{n-1})M}$ e, portanto, $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular sobre o $R$-módulo $M$. ■

A seguir, temos uma consequência imediata do teorema anterior.

livro de huneke⟩ **Corolário 3.2.13** Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma sequência regular em $R$. Então, temos que $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$ é uma **resolução livre** de $\dfrac{R}{(x_1, \ldots, x_n)}$.

*Demonstração.* Note que

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R): \quad 0 \longrightarrow R^{\binom{n}{n}} \longrightarrow R^{\binom{n}{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{\binom{n}{1}} \longrightarrow R \longrightarrow \frac{R}{(x_1, \ldots, x_n)} \longrightarrow 0,$$

é uma sequência exata, por (1) e (3) do Teorema 3.2.12, pois todas as homologias a menos de $i = 0$ são nulas). E é uma **resolução livre** (pois cada um dos seus termos é, evidentemente, um $R$-módulo livre.

Portanto, o resultado segue. ■

**Teorema 3.2.14** **(Mudança de Base)** Se $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo de álgebras e ⟨Obs1⟩ $x_1, \ldots, x_n \in R$, então segue que:

1. $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R) \otimes_R S \cong K_\bullet(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n); S)$.
2. Se $\varphi$ é plano, então $H_i((x_1, \ldots, x_n); M) \otimes_R S \cong H_i((x_1, \ldots, x_n); M \otimes_R S)$ para qualquer $R$-módulo $M$ e cada $i \in \mathbb{Z}$..

*Demostração.* Prova de $(1)$. Se $n = 1$, basta aplicar $- \otimes_R S$ em

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x_1} R \longrightarrow 0,$$

para obter o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R \otimes_R S & \xrightarrow{x_1 \otimes \mathrm{id}_S} & R \otimes_R S & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\varphi(x_1)} & S & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

O resultado segue, agora, por indução.

Prova de $(2)$ segue facilmente do Exercício 5 da Seção 1.4, desde $H_i(C_\bullet \otimes S) \cong H_i(C_\bullet) \otimes S$ para qualquer complexo arbitrário $C_\bullet$ sobre $R$ se $S$ é $R$-plano. ■

⟨koszullong⟩ **Proposição 3.2.15** Seja $R$ um anel, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em $R$, $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ uma sequência exata de $R$-módulos. Então

$$0 \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, M_1) \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, M) \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, M_2) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos. Em particular, temos uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M_1) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M_2) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x}, M_1) \longrightarrow \cdots$$

*Demonstração.* As componentes $K_\bullet(\mathbf{x},R)$ são $R$-módulos livres, portanto são $R$-módulos planos, agora usando a sequência exata curta da hipotese, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 \otimes_R K_\bullet(\mathbf{x},R) & \longrightarrow & M \otimes_R K_\bullet(\mathbf{x},R) & \longrightarrow & M_2 \otimes_R K_\bullet(\mathbf{x},R) & \longrightarrow & 0\,, \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & K_\bullet(\mathbf{x},M_1) & \longrightarrow & K_\bullet(\mathbf{x},M) & \longrightarrow & K_\bullet(\mathbf{x},M_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

assim temos o resultado.

■

**Observação 3.2.16** O que podemos dizer sobre $\mathrm{H}_1(x,0;R)$?

Por (3.2), temos:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{H}_1(x;R)}{0\cdot \mathrm{H}_0(x;R)} \longrightarrow \mathrm{H}_1(x,0;R) \longrightarrow \mathrm{ann}_{\mathrm{H}_0(x;R)}(0) \longrightarrow 0,$$

e então

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_1(x;R) \longrightarrow \mathrm{H}_1(x,0;R) \longrightarrow \mathrm{H}_0(x;R) \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{H}_1(x,0;R) \cong \mathrm{H}_1(x;R) \oplus \mathrm{H}_0(x;R).$$

**Observação 3.2.17** **(Complexos de Koszul e o Tor)** A seguir provaremos que a homologia $\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;S)$ é anulado por $(x_1,\ldots,x_n)$. Seja $S$ um anel e $x_1,\ldots,x_n \in S$. Tome $R = S[T_1,\ldots,T_n]$. Então $T_1,\ldots,T_n$ é uma sequência regular em $R$. Pelo Corolário 3.2.13, segue que $K_\bullet(T_1,\ldots,T_n;R)$ é uma **resolução livre** de $\dfrac{R}{(T_1,\ldots,T_n)}$.

Considere a aplicação definida por $\varphi(T_i) = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, (que torna $S$ um $R$-módulo). Pelo Teorema 3.2.14 item $(1)$,

$$K_\bullet(T_1,\ldots,T_n;R) \otimes_R S \cong K_\bullet(x_1,\ldots,x_n;S).$$

Logo, temos que:

$$\mathrm{H}_i(K_\bullet(T_1,\ldots,T_n;R) \otimes_R S) = \mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;S).$$

Pela definição do funtor Tor, temos que:

$$\mathrm{H}_i(K_\bullet(T_1,\ldots,T_n;R) \otimes_R S) = \mathrm{Tor}_i^R\left(\frac{R}{(T_1,\ldots,T_n)},S\right).$$

Em geral, temos

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Tor}_i^R(M,N)) \supset \mathrm{Ann}(M) + \mathrm{Ann}(N).$$

Portanto, note que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ann}(\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_n;S)) & = & \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Tor}_i^R\left(\dfrac{R}{(T_1,\ldots,T_n)},S\right)\right) \\ & \supset & (T_1,\ldots,T_n) + (T_1-x_1,\ldots,T_n-x_n) \\ & \supset & (x_1,\ldots,x_n). \end{array}$$

## 3.3 Anéis locais regulares

**Definição 3.3.1** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel Noetheriano e local. Dizemos que $(R,\mathfrak{m},k)$ é **regular** se

$$\dim(R) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right) =: \mu(\mathfrak{m}).$$

Ou, equivalentemente, o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$ é igual à $\dim(R)$.

Observe que a desigualdade:

$$\dim(R) \leqslant \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right)$$

vale sempre. Isto pelo "Teorema de ideal principal de Krull". Seja $R$ um anel Noetheriano e $\mathfrak{p}$ um ideal primo mínimal de um ideal gerado por $n$ elementos. Então, a altura de $\mathfrak{p}$ é no máximo $n$.

**Exemplo 3.3.2** Seja $R = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^3-y^2)}$ e considere o ideal maximal $\mathfrak{m}_0 = (x,y)$. Temos que $R_{\mathfrak{m}_0}$ não é regular. Porém, para qualquer outro ideal maximal $\mathfrak{m} = (x-\alpha, y-\beta)$, com $\alpha^3 = \beta^2$, temos que $R_{\mathfrak{m}}$ é regular.

Provaremos duas afirmações.
**Afirmação 1**: $R_{\mathfrak{m}_0}$ **não** é regular.
Temos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{m}_o R_{\mathfrak{m}_o}}{{\mathfrak{m}_o}^2 R_{\mathfrak{m}_o}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\mathfrak{m}}_0}{\overline{\mathfrak{m}}_0^2} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(\overline{x},\overline{y})}{(\overline{x}^2,\overline{xy},\overline{y}^2)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(x,y)}{(x,y)^2+(x^3-y^2)}$$

note que o espaço vetorial acima é gerado pelas imagens do monômios $x^i j^j$ tal que $i+j=1$, isto é

$$x^i y^j \equiv 0 \bmod \left((x,y)^2+(x^3-y^2)\right).$$

Logo é suficiente tomar apenas as imagens de $x$ e $y$, que são linearmente independente sobre $\mathbb{C}$, pois se existisse $f \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que

$$ax+by+(x^3-y^2)\cdot f(x,y) \in (x,y)^2 \quad a,b \in \mathbb{C}$$

fazendo a substituição $x=t^2$ e $y=t^3$ teriamos que $at^2+bt^3 \in (t^5)$, logo $a=0$ e $b=0$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{m}_o R_{\mathfrak{m}_o}}{{\mathfrak{m}_o}^2 R_{\mathfrak{m}_o}} = 2.$$

Por outro lado, como $\mathfrak{m}_0$ é ideal maximal de $R$ e $(x^3-y^2)$ é ideal primo de $R$, temos que $\dim R_{\mathfrak{m}_0} = 1$. Suponha que $\dim R_{\mathfrak{m}_0} > 1$, então, existe um ideal primo própio entre $(x^3-y^2)$ e $\mathfrak{m}_0$. Logo $R$ tería dimenão maior do que dois, contradição. Portanto, $R_{\mathfrak{m}_0}$ não é regular.

**Afirmação 2**: Analogamente fazendo os calculos feitos acima. Temos, para qualquer outro ideal maximal $\mathfrak{m} = (x-\alpha, y-\beta)$, com $\alpha^3 = \beta^2$ onde $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, $R_{\mathfrak{m}}$ é **regular**.

Isto é, $\dim R_{\mathfrak{m}} = 1$ e,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(\overline{x}-\alpha,\overline{y}-\beta)}{((\overline{x}-\alpha)^2,(\overline{x}-\alpha)(\overline{y}-\beta),(\overline{y}-\beta)^2)} = 1.$$

Logo, $R_{\mathfrak{m}}$ é regular, como desejado.

**Definição 3.3.3** Para um anel $R$, definimos o **lugar singular** como sendo

$$\mathrm{Sing}(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : R_{\mathfrak{p}} \text{ não é regular}\},$$

e o **lugar regular** como sendo:

$$\mathrm{Reg}(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : R_{\mathfrak{p}} \text{ é regular}\}.$$

A seguir daremos um critério de regularidade em conjuntos algébricos ou variedades afins, chamado também como critério do Jacobiano. Antes relembremos, seja $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ uma variedade afim e seja $p \in X$ um ponto. Um *germe de uma função regular em p* é uma classe de equivalência de pares $(U, f)$ onde $U$ é uma vizinhança aberta de $p$ e $f$ é uma função regular sobre $U$. Dois germes $(U, f)$ e $(V, g)$ são equivalentes se existe uma visinhança $W \subset U \cap V$ em $p$ tal que $f_{|W} = g_{|W}$. O anel local de $X$ em $p$ é o anel de germes de funções regulares de $X$ em $p$ denotado por $\mathscr{O}_{X,p}$. Nos definimos $\dim_p X := \dim \mathscr{O}_{X,p}$. Pode ser mostrado que $\mathfrak{m}_{X,p} := \{f \in \mathscr{O}_{X,p} | f(p) = 0\}$ é o ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$ e $\mathscr{O}_{X,p} \cong k[X]_{\mathfrak{m}_p} = \left\{ \frac{f}{g} | f, g \in k[X], g(p) \neq 0 \right\}$ onde $k[X] = \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)}$ e $\mathfrak{m}_p$ é um ideal maximal de $k[X]$.

**Definição 3.3.4** Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ uma variedade afim, e seja $f_1, \ldots, f_r \in R = k[x_1, \ldots, x_n]$ o conjunto de geradores que define o ideal de $X$. A variedade $X$ é não singular no ponto $p \in X$ se o posto da matriz $\mathscr{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ é $n - r$, onde $r$ é a dimension de $X$. A variedade de $X$ é não singular se é não singular em todo ponto.

**Teorema 3.3.5** Seja $X \subseteq A^n$ uma variedade afim. Seja $p \in X$ um ponto. Então $X$ é não singular no ponto $p$ se, e somente se o anel local $\mathscr{O}_{X,p} := \left[\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)}\right]_{\mathfrak{m}_p}$ é um anel local regular.

*Demonstração.* Seja $p = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ e seja $\mathfrak{a}_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ o correspondente ideal maximal em $R = k[x_1, \ldots, x_n]$. Definamos uma aplicação linear $\phi : R \to k^n$ como

$$\phi(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

para qualquer $f \in R$. Então $\phi(x_i - a_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ forma uma $k$-base para $k^n$ e que $\phi(\mathfrak{a}_p^2) = 0$. Portanto $\phi$ induce um isomorfismo $\phi' : \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \to k^n$.

Seja $\mathfrak{b} = I(X) = (f_1, \ldots, f_t)$ o ideal de $X$ em $R$. O posto da matriz Jacobiana $\mathscr{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ é a dimensão de $\phi(\mathfrak{b})$ como um subespaço de $k^n$. Usando o isomorfismo $\phi'$, este é a mesma dimensão do subespaço $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2/\mathfrak{a}_p^2$ de $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2$. Por outro lado, o anel local $\mathscr{O}_{X,p}$ como é obtido desde $R$ dividindo por $\mathfrak{b}$ e localizando no ideal maximal $\mathfrak{a}_p$. Assim se $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$, logo este corresponde a um ideal maximal $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{b}$ em $\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)}$. Então nos temos que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{a}_p/(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2)$. Agora considere a sequência exata

$$0 \to \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2/\mathfrak{a}_p^2 \to \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \to \mathfrak{a}_p/(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2) \to 0$$

e caculando as dimensões dos espaços vetoriais, temos $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \mathrm{posto}(\mathscr{J}) = n$. Agora seja $\dim X = r$. Então $\dim \mathscr{O}_{X,p} = r$. Portanto $\mathscr{O}_{X,p}$ é um anel local regular se e somente se $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$. Mas, este é equivalente para $\mathrm{posto}(\mathscr{J}) = n - r$. Portanto $p$ é um ponto é não singular se e somente se o anel local $\mathscr{O}_{X,p}$ é regular. ■

A seguir vamos enunciar e provar um teorema de Serre. Antes de fazer isso, vamos colocar alguns resultados que irão nos auxiliar na prova deste tal teorema.

livro de huneke⟩ **Lema 3.3.6** Suponha que $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado e que $\phi : M \to M$ é sobrejetor. Então, temos que $\phi$ é um isomorfismo.

*Demonstração.* Seja $S = R[t]$ (o anel de polinômios na variável $t$ com coeficientes em $R$). Desta forma, podemos fazer $M$ ser um $S$-módulo: basta definir a operação de multiplicação da seguinte maneira, $f(t) \cdot m := f(\phi(m))$, isto é, $\phi(m) = tm$. Agora, uma vez que $\phi$ é sobrejetora, temos que a tripla $M \xrightarrow{\cdot t} M \to 0$ de $S$-módulos é exata: de fato, dado $m \in M$ como $\phi$ é sobrejetora temos que existe $n \in M$ tal que $\phi(n) = m$ e sendo $\phi(n) = tn$, segue que $tn = m$, e portanto $\cdot t$ é sobrejetora. Assim, $(t)M = M$, e pelo Lema de Nakayama, existe um $g(t) \in S$ tal que $(1 - tg)M = 0$. Suponha que $m \in \mathrm{Ker}(\phi)$, para algum $m \in M$, ou seja, que $tm = 0$, para algum $m \in M$. Então,

$$(1 - tg)m = 0 \Rightarrow m - tmg = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Portanto, $\phi$ é injetora. ■

livro de huneke⟩ **Lema 3.3.7** Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e Noetheriano. Sejam $F$, $G$ dois $R$-módulos livres que são finitamente gerados e $\Phi : F \to G$ um homomorfismo de $R$-módulos. Se $\bar{\Phi} : F/\mathfrak{m}F \to G/\mathfrak{m}G$ é injetiva, então $\Phi$ é **cinde**, isto é, existe um $R$-homomorfismo $\Psi : G \to F$ tal que $\Psi \circ \Phi \equiv \mathrm{Id}_F$.

*Demonstração.* Vamos escrever $F = R^n$ e $G = R^m$, e considere a base canônica de elementos de $F$: $\{e_1, \ldots, e_n\}$, onde $e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, com 1 na $i$-ésima posição. Temos, por hipótese, que $\mathrm{Ker}\left(\bar{\Phi}\right) = \{0\}$, e uma vez que $G/\mathfrak{m}G = R^m \otimes_R R/\mathfrak{m} = (R/\mathfrak{m})^m = k^m$, temos que $\bar{\Phi}(\bar{e_1}), \ldots, \bar{\Phi}(\bar{e_n}) \in k^m$ são linearmente independentes em $G/\mathfrak{m}G$. De fato, se $r_1\bar{\Phi}(\bar{e_1}) + \ldots + r_n\bar{\Phi}(\bar{e_n}) = 0$ então $\bar{\Phi}(r_1\bar{e}_1 + \ldots + r_n\bar{e}_n) = 0$ e assim, $r_1\bar{e_1} + \ldots + r_n\bar{e_n} \in \mathrm{Ker}\left(\bar{\Phi}\right) = 0$ em $(R/\mathfrak{m})^n = k^n$; logo, como $\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_n}$ é base de $k^n = F/\mathfrak{m}F$ (que é $R$-módulo livre finitamente gerado) segue que $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Escolha então $\bar{f_{n+1}}, \ldots, \bar{f_m}$ extendendo uma base de $G/\mathfrak{m}G$. Portanto, temos que:

$$G = (\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n), f_{n+1}, \ldots, f_m) + \mathfrak{m}G = G,$$

e então, pelo Lema de Nakayama, temos que:

$$G = (\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n), f_{n+1}, \ldots, f_m).$$

Portanto, de acordo com a discussão que vem logo a seguir, o conjunto formado pelos seguintes elementos $\{\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n), f_{n+1}, \ldots, f_m\}$ forma uma base para $G$.

Desta forma, para $\Psi : G \to F$ definimos da seguinte forma:

$$\Psi(\alpha_1\Phi(e_1) + \ldots + \alpha_n\Phi(e_n) + \alpha_{n+1}f_{n+1} + \ldots + \alpha_m f_m) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

com $\alpha_i \in R$, para $i = 1, \ldots, n$. ■

Discussão para concluir o Lema 3.3.7: Seja $G = R^m$, e $(y_1, \ldots, y_m) = G$ como um $R$-módulo.

Assuma que $\sum_{i=1}^m r_i y_i = 0$. Queremos provar que $r_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Pelo Lema de Nakayama, temos que $\bar{r_i} = 0$, isto é, $r_i \in \mathfrak{m}$ (Lembre-se de que $\bar{G} = k^m$).

Considere agora a sobrejeção:

$$\phi : G \to G,\ e_i \mapsto y_i.$$

Pelo Lema 3.3.6, temos que $\phi$ é um isomorfismo; assim, segue que $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ e então se $\phi(r_1,\ldots,r_m) = \sum_{i=1}^{m} r_i y_i = 0$, obtemos que $(r_1,\ldots,r_m) = (0,\ldots,0)$. Portanto, $r_i = 0$, para todo $i = 1,\ldots,m$.

livro de huneke⟩ **Lema 3.3.8 — (Serre).** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano. Se $\mathfrak{m}$ é minimalmente gerado por $s$ elementos, isto é, se $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_s)$ onde $s = \dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right)$, então temos que:

$$\dim_k\left(\mathrm{Tor}_i^R(k,k)\right) \geq \binom{s}{i}.$$

*Demonstração.* Considere $\mathrm{K}_\bullet(x_1,\ldots,x_s;R)$ o complexo de Koszul onde $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_s)$. Note que, de acordo com a construção feita na Observação 3.2.9, temos $\mathrm{K}_i \cong R^{\binom{s}{i}}$. Mas, o complexo de Koszul, em geral, não é uma sequência exata. Seja $\mathbf{F}_\bullet$ uma resolução livre minimal de $k = R/\mathfrak{m}$.

Temos que provar a seguinte afirmação chave: $\mathrm{K}_i$ é um somando direto de $\mathrm{F}_i$. Se isto for verdade, então temos que:

$$\dim_k\left(\mathrm{Tor}_i^R(k,k)\right) = \mathrm{rank}(\mathrm{F}_i) \geq \mathrm{rank}(\mathrm{K}_i) = \binom{s}{i}.$$

Para provar a afirmação chave, fazemos indução sobre $i$. Pelo Lema 3.3.7, é suficiente mostrar que existe $\phi_i : \mathrm{K}_i \to \mathrm{F}_i$ tal que $\bar{\phi}_i : \bar{\mathrm{K}}_i \to \bar{\mathrm{F}}_i$ é injetora. Consideremos a seguinte resolução minimal

$$\mathbf{F}_\bullet : \ldots \to F_s \to \ldots \to F_2 \to F_1 \to R \to k \to 0,$$

e o complexo de Koszul

$$\mathrm{K}_\bullet(x_1,\ldots,x_s;R) : 0 \to \mathrm{K}_s \to \ldots \to \mathrm{K}_2 \to \mathrm{K}_1 \to R \to k \to 0.$$

Pelo lema de comparação Lemma 2.4.7, temos uma aplicação de complexos $\varphi_\bullet$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_s & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi_s} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_s & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Suponhamos que a afirmação vale para $i-1$, isto é, existe um $\psi_{i-1}$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
K_i & \xrightarrow{d_i} & K_{i-1} \\
{\scriptstyle \varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i-1}}\uparrow{\scriptstyle \psi_{i-1}} \\
F_i & \xrightarrow{\delta_i} & F_{i-1}
\end{array}$$

e $\psi_{i-1} \circ \phi_{i-1} = \mathrm{Id}_{K_{i-1}}$.

Suponha que $z \in \mathrm{K}_i$ e que $\phi_i(z) \in \mathfrak{m}F_i$, isto é, $\bar{\phi}_i(\bar{z}) = 0$. Pela minimalidade de $\mathbf{F}_\bullet$ temos que, $\delta_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$. Isto implica que $(\delta_i \circ \phi_i)(z) \in \mathfrak{m}^2 F_{i-1}$. Portanto, pela

comutatividade no diagrama, temos que $\phi_{i-1}(d_i(z))$ está em $\mathfrak{m}^2 F_{i-1}$, e isto força que $(\psi_{i-1}\circ\phi_{i-1})(d_i(z)) \in \mathfrak{m}^2 \mathrm{K}_{i-1}$. Desta forma, temos que $d_i(z) \in \mathfrak{m}^2\mathrm{K}_{i-1}$, pois $\psi_{i-1}\circ\phi_{i-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{K}_{i-1}}$.

Finalmente, nós acabamos se mostrarmos a afirmação: se $d_i(z) \in \mathfrak{m}^2\mathrm{K}_{i-1}$, então $z \in \mathfrak{m}\mathrm{K}_i$ (consequentemente, $\bar{z}=0$ e $\bar{\phi}_i$ é injetiva).

Como $\mathrm{K}_i = R^{\binom{s}{i}}$ e possui como base canônica

$$e_J = \left\{ e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \mid 1 \le j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_i \le s \right\},$$

com $J \in [S]$, e $|J| = i$. Então, de acordo com o feito na Observação 3.2.9, note que

$$d_i(e_J) = \textstyle\sum_{j\in J} \pm x_j e_{J\setminus\{j\}},$$

e seja

$$z = \sum_{|J|=i, J\subset[S]} z_J e_J$$

um elemento qualquer de $K_i$, então

$$d_i(z) = \sum_{j\in J}\sum_{J\subset[S],|J|=i} \left(\pm z_J x_j e_{J\setminus\{j\}}\right) = \sum_{L\subset[S],|L|=i-1} \left(\sum_{j\notin L} \pm z_{L\cup\{j\}} x_j\right) e_L.$$

Uma vez que, $d_i(z) \in \mathfrak{m}^2\mathrm{K}_{i-1}$, temos que $\sum_{j\notin L} \pm z_{L\cup\{j\}} x_j \in \mathfrak{m}^2$. Mas, $\bar{x_1},\ldots,\bar{x_s}$ é uma base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, e sendo assim segue que:

$$\overline{\textstyle\sum_{j\notin L} \pm z_{L\cap\{j\}} x_j} = 0 \overset{LI}{\Rightarrow} \bar{z}_{L\cup\{j\}} = 0 \Rightarrow z_{L\cup\{j\}} \in \mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m},$$

e consequêntemente $z_{L\cup\{j\}} \in \mathfrak{m}$, o que força $z \in \mathfrak{m}\mathrm{K}_i$, como desejado. ■

**Conjequetura: (Buchsbaum-Eisenbud, Horrocks).** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano, $M$ um $R$-módulo Ariniano e finitamente gerado. Se a dimensão projetiva de $M$ é finta, então

$$\dim_k\left(\mathrm{Tor}_i^R(M,k)\right) \ge \binom{d}{i}$$

onde $d = \dim(R)$.

## 3.4 Álgebra homologica e anéis locais regulares

Vamos agora caracterizar um anel local e regular em termos de álgebra homológica. É também outra maneira de se definir um anel local regular, é se ele satisfaz uma (e portanto todas) as condições equivalentes do teorema a seguir. Este teorema é um dos primcipais resultados deste capítulo. Antes faremos uma definição e um Lema.

**Definição 3.4.1** Em um domínio Noetheriano $R$, temos que a sequência $x_1, \ldots, x_m$ de elementos de $R$ é chamada de uma **sequência prima** se os ideais $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ são ideais primos distintos, para todo $0 \le i \le m$, sendo que para $i = 0$ nós temos o ideal nulo.

⟨lema 5 do livro⟩ **Lema 3.4.2** Se uma sequência num domínio Noetheriano $R$ é uma **sequência prima**, então ela é uma **sequência regular**.

*Demonstração.* A prova é uma aplicação imediata da definição de sequência regular. De fato, seja $x_1,\ldots,x_m$ uma sequência prima; desta forma, temos que $(x_1)$ é um ideal primo e assim $x_1$ é um elemento primo; com isso, se existe $0 \neq m \in R$ tal que $x_1 m = 0$, como $R$ é um domínio, devemos ter que $x_1 = 0$, o que é absurdo e então $x_1$ é um não divisor de zero sobre o $R$-módulo $R$, e além disso, $x_1 R \neq R$ uma vez que caso contrário temos que $x_1 = 1_R$, o que não pode acontecer; portanto, $x_1$ é um elemento regular sobre $R$. Agora, uma vez que o ideal $(x_1,\ldots,x_{i-1})$, para cada $i = 2,\ldots,m$, é um ideal primo segue que $x_i$ é um elemento regular sobre o $R$-módulo $R/(x_1,\ldots,x_{i-1})$, para cada $i = 2,\ldots,m$.

Isto é equivalente a dizer que para $1 \leq i \leq m$, o elemento $x_i$ é um não divisor de zero sobre o $R$-módulo $R/(x_1,\ldots,x_{i-1})$ e $(x_1,x_2,\ldots,x_m)R \neq R$. Portanto, concluímos, por definição, que $x_1,\ldots,x_m \in R$ é uma sequência regular sobre o $R$-módulo $R$, como queríamos demonstrar. ■

No proximo teorema, vamos usar o Teorema dos Primos Avoidance e Teorema do ideal principal de Krull, o qual relembramos o enunciado a seguir:
(**Teorema dos Primos Avoidance**:) "Sejam $I_1,\ldots,I_n$ ideais em um anel $R$, com no máximo dois não sendo primos. Se $J$ é outro ideal e $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, então $J \subseteq I_j$, para algum $j$."
(**Teorema do ideal principal de Krull**:) "Seja $R$ um anel Noetheriano. Então, temos que:
(1) Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo minimal sobre um ideal principal $(x)$, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$.
(2) Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo minimal sobre um ideal $(x_1,\ldots,x_n)$, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$."

livro de huneke⟩ **Teorema 3.4.3** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local, Noetheriano e de dimensão $d$. As seguintes afirmações são equivalentes:
(1) $\mathrm{pdim}_R(k) < \infty$;
(2) $\mathrm{pdim}_R(M) < \infty$, para qualquer $R$-módulo finitamente gerado $M$;
(3) $\mathfrak{m}$ é gerado por uma sequência regular;
(4) $\mathfrak{m}$ é gerado por $d$ elementos.

*Demonstração.* Vamos mostrar as equivalências.

(2) $\Rightarrow$ (1): Basta tomar $M = k$, uma vez que $k$ é um $R$-módulo finitamente gerado, pois $R$ é um anel Noetheriano.

(3) $\Rightarrow$ (1): Por hipótese, podemos escrever $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_t)$, onde $x_1,\ldots,x_t$ é uma sequência regular no anel $R$. Então, pelo Corolário 3.2.13, temos que: $K_\bullet(x_1,\ldots,x_t;R)$ é uma resolução livre de $R/(x_1,\ldots,x_t) = R/\mathfrak{m} = k$, onde no caso temos que:

$$K_\bullet(x_1,\ldots,x_t;R): 0 \to R^{\binom{t}{t}} \to R^{\binom{t}{t-1}} \to R^{\binom{t}{t-2}} \to \ldots \to R^{\binom{t}{1}} \to R \to R/(x_1,\ldots,x_t) \to 0.$$

Portanto, temos por definição, que a dimensão projetiva do $R$-módulo $k$ é finita.

(1) $\Rightarrow$ (2): Suponhamos que $\mathrm{pdim}_R(k)$ é finita. Dado um $R$-módulo finitamente gerado $M$, temos que, pelo Corolário 2.10.5:

$$\mathrm{pdim}_R(M) = \sup\left\{i \mid \mathrm{Tor}_i^R(M,k) \neq 0\right\}.$$

Assim, precisamos mostrar que o $R$-módulo $\mathrm{Tor}_i^R(M,k) = 0$, para todo $i$ suficientemente grande. Mas, temos que $\mathrm{Tor}_i^R(M,k) = \mathrm{Tor}_i^R(k,M)$. Uma vez que $\mathrm{pdim}_R(k) < \infty$ temos, pela Proposição 2.10.4, que $\mathrm{Tor}_i^R(k,M) = 0$, para todo $i > \mathrm{pdim}_R(k)$. Portanto, temos que o $R$-módulo $\mathrm{Tor}_i^R(M,k) = 0$, para todo $i > \mathrm{pdim}_R(k)$. Em particular, temos

que $\text{pdim}_R(M) \leq \text{pdim}_R(k)$ (pois $\text{pdim}_R(M)$ é o supremo onde o Tor não se anula), para qualquer $R$-módulo finitamente gerado $M$.

$(4) \Rightarrow (3)$: Temos que $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$, onde $\dim(R) = d$. Pelo Lema 3.4.2, é suficiente mostrar que $\mathfrak{m}$ é gerado por uma sequência prima. Vamos fazer indução sobre $d$. Se $d = 0$, temos que $\mathfrak{m} = (0)$ e desta forma, $R$ é um domínio e nada temos a fazer.

Para $d > 0$, notamos primeiramente que $\mathfrak{m}$ não é um ideal primo minimal de $R$, visto que por ser ideal maximal contém qualquer outro ideal.

Desta forma, pelos primos avoidance, temos que $\mathfrak{m}$ não está contido em $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\text{Min}(R)} \mathfrak{p}$ união dos ideais primos minimais do anel $R$. Portanto, existe um elemento $x_1^{'} \in \mathfrak{m}$ tal que, sem perda de generalidade, podemos escrever:

$$x_1^{'} = x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_dx_d \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in\text{Min}(R)} \mathfrak{p}.$$

Assim, vamos substituir $x_1$ por $x_1^{'}$. Então, temos que $\mathfrak{m} = \left(x_1^{'}, x_2, \ldots, x_d\right)$. Note que, a dimensão $\dim(R/x_1R) \geq d-1$, pela formula $\text{ht}(x_1) + \dim(R/x_1R) = \dim(R)$ e o teorema do ideal principal de Krull.

Mas, $\mathfrak{m}/x_1R$ é gerado por $d-1$ elementos, de modo que novamente pelo teorema do ideal principal de Krull, temos que

$$\dim(R/x_1R) \overset{\text{def}}{=} \text{ht}(\mathfrak{m}/x_1R) \leq d-1$$

consequentemente, $\dim(R/x_1R) = d-1$.

Por indução, as imagens de $x_1, \ldots, x_d$ em $R/x_1R$ formam uma sequência prima, temos $(x_1), (x_1,x_2), \ldots, (x_1,x_2,\ldots,x_d)$ é uma sequência prima de $R$ (correspondência de ideais primos). Portanto, pelo Lema 3.4.2, temos que $x_1, \ldots, x_d$ é uma sequência regular(d esde que $R$ seja um domínio).

Resta-nos mostrar, nesta implicação com a hipótese de que $\mathfrak{m}$ é gerado por $d$ elementos onde $d = \dim(R)$, que $R$ é um domínio. De fato, uma vez que $(x_1)$ é um ideal primo, pois $x_1, \ldots, x_d$ formam uma sequência prima. Agora, como $x_1$, elemento escolhido como acima, evita o primos minimais, então, existe um ideal primo minimal $\mathfrak{q}$ contido propriamente em $(x_1)$. Seja $y \in \mathfrak{q}$, e assim segue que $y \in (x_1)$ e então podemos escrever $y = rx_1$, com $r \in R$. Uma vez que $(x_1)$ evita $\mathfrak{q}$, temos que $x_1 \notin \mathfrak{q}$ e então, como $\mathfrak{q}$ é ideal primo, segue que $r \in \mathfrak{q}$. Desta forma, $\mathfrak{q} = (x_1)\mathfrak{q}$, e o Lema de Nakayama nos fornece que $\mathfrak{q} = (0)$. Portanto, $R$ é um domínio.

$(1) \Rightarrow (4)$: **Afirmação**: Se $\text{pdim}_R(k) < \infty$, então $\text{pdim}_R(k) \leq \dim(R) = d$.

Com esta afirmação e pelo Lema 3.3.8, temos que $s = \mu(\mathfrak{m}) = d$: De fato, note que pela afirmação temos que $\text{pdim}_R(k) \leq \dim(R) = d$. Consequentemente, pela definição de dimensão projetiva, temos que $\text{Tor}_i^R(k,k) = 0$, para todo $i > d$. Agora, aplicando o Lema 3.3.8, que diz que $\text{Tor}_s^R(k,k) \neq 0$, obtemos que $s \leq d$, e como sempre vale a desigualdade $\dim(R) \leq \mu(\mathfrak{m})$. Desta forma, temos que $s = d$, como queríamos demonstrar.

Resta provar a afirmação. Para tanto, relembramos que já temos visto, que para qualquer $R$-módulo finitamente gerado $M$, temos que $\text{pdim}_R(M) \leq \text{pdim}_R(k)$. Seja $n = \text{pdim}_R(k)$ e suponha que $n > d$. Escolha uma sequência regular maximal $y_1, \ldots, y_t \in \mathfrak{m}$. Já temos que $t \leq d$. Pela escolha, temos que $\mathfrak{m}$ é associado à $R/(y_1, \ldots, y_t)$. De fato, se não fosse associado à este $R$-módulo nós temos que o teorema de primos avoidance nos permite

escolher

$$y_{t+1} \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(y_1,\ldots,y_t))} \mathfrak{p},$$

tal que $y_1,\ldots,y_{t+1}$ é uma sequência regular; isso é uma contradição, pois $y_1,\ldots,y_t$ é maximal. Desta forma, podemos mergulhar $k$ em $R/(y_1,\ldots,y_t)$, uma vez que como $\mathfrak{m}$ é associado à $R/(y_1,\ldots,y_t)$ segue que $R/(y_1,\ldots,y_t)$ contém um submódulo que é isomorfo à $k$. Considere então a sequência exata curta:

$$0 \to k \to R/(y_1,\ldots,y_t) \to N \to 0,$$

onde $N$ é um $R$-módulo finitamente gerado. E tensorizando com $k$ essa sequência anterior, vamos então olhar no $R$-módulo de torção Tor, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Tor}^R_{n+1}(N,k) & \to & \mathrm{Tor}^R_n(k,k) & \to & \mathrm{Tor}^R_n(R/(y_1,\ldots,y_t),k) & & \\ \| & & \not\| & & \| & & (*) \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Notamos agora que $\mathrm{pdim}_R(N) \leq n$ nos fornece que

$$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(N,k) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Tor}^R_n(R/(y_1,\ldots,y_t),k) = 0$$

segue a partir do Corolário 3.2.13, isto é, $K_\bullet(y_1,\ldots,y_t;R)$ é uma resolução livre de $R/(y_1,\ldots,y_t)$ de comprimento $t \leq d < n$. Além disso, temos que $\mathrm{Tor}^R_n(k,k) \neq 0$, pois $\mathrm{pdim}_R(k) = n$. Isto nos fornece uma contradição com a sequência exata curta $(*)$. Desta forma, temos que $\mathrm{pdim}_R(k) \leq d$, provando assim a afirmação.

■

Temos uma consequência imediata do Teorema 3.4.3, a qual é dada a seguir.

livro de huneke⟩ **Corolário 3.4.4** Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local, Noetheriano e regular, então $R$ é um domínio.

*Demonstração.* Sendo $R$ um anel local e regular, o resultado segue a partir da prova de $(4) \Rightarrow (3)$ do Teorema 3.4.3. ■

## 3.5 Propriedades de anel local regular

O objetivo desta seção é desenvolver vários corolários do Teorema 3.4.3. Vamos começar com algumas definições que são necessárias para as afirmações destes corolários.

**Definição 3.5.1** Para um anel $R$ e um ideal $I$ de $R$, a **codimensão** de $I$ em $R$ é definida por:

$$\mathrm{codim}(I) = \dim(R) - \dim(R/I).$$

**Definição 3.5.2** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ e $(S,\mathfrak{n},l)$ dois anéis locais. Um homomorfismo de anéis $\phi : (R,\mathfrak{m},k) \to (S,\mathfrak{n},l)$ é um homomorfismo local se $\mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$.
Dizemos que, um homomorfismo de anéis $\phi : R \to S$ é um homomorfismo plano se, via $\phi$, $S$ é um $R$-módulo plano.

Definimos a seguir quando um anel Noetheriano, que não é local, é um anel regular.

**Definição 3.5.3** Seja $R$ um anel Noetheriano, não necessariamente local. Dizemos que $R$ é regular, se $R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R$, com $S = R \setminus \mathfrak{p}$, é um anel Noetheriano, local e regular, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Equivalentemente, $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel local, Noetheriano e regular, para qualquer ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $R$.

**Teorema 3.5.4 — Teorema syzygy de Hilbert.** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então $\operatorname{pdim}_R(M) \leq \dim(R)$.

*Demonstração.* Como $R$ é regular e $M$ é finitamente gerado, então $\operatorname{pdim}_R(M) < \infty$. Então, existe

$$\mathbf{F}_{\bullet,M} : 0 \to F_p \xrightarrow{\varphi_p} \ldots \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0,$$

uma resolução livre minimal de $M$. Então, temos $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ and

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_j^R(M,k) &= H_j(\mathbf{F}_{\bullet,M} \otimes_R k) \\ &= H_j\left(0 \to F_p \otimes_R k \xrightarrow{0} \cdots \to F_2 \otimes_R k \xrightarrow{0} F_1 \otimes_R k \xrightarrow{0} F_0 \otimes_R k\right) \\ &= F_j \otimes_R k \cong k^{\operatorname{posto}(F_j)}. \end{aligned}$$

Como

$$p \geq \sup\{j | \operatorname{Tor}_j^R(M,k) \neq 0\} = \operatorname{pdim}_R(M).$$

Por outro lado também temos, $\operatorname{Tor}_j^R(M,k) = H_j(K_\bullet(x_1,\ldots,x_n,R) \otimes_R M)$ onde $(x_1,\ldots,x_n) = \mathfrak{m}$, então $\operatorname{Tor}_j^R(M,k) = 0$ para $j > n = \dim(R)$. Assim $\dim(R) \geq \operatorname{pdim}(M)$.

■

Vamos enunciar a seguir, vários corolários do Teorema 3.4.3.

livro de huneke⟩ **Corolário 3.5.5 — Consequências do Teorema 3.4.3.** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local, Noetheriano e regular. Seja $I \subset \mathfrak{m}$ um ideal de $R$.

1. Seja $x$ um elemento não nulo de $\mathfrak{m}$. Então, $R/(x)$ é um anel local, Noetheriano e regular se, e somente se, $x \notin \mathfrak{m}^2$:
   **Prova:** ($\Leftarrow$) Seja $0 \neq x \in \mathfrak{m}$. Uma vez que $R$ é um anel local e regular, nós já temos, pelo Corolário 3.4.4, que $R$ é um domínio. Portanto, $x$ é um não divisor de zero sobre $R$. Sendo assim, temos que:

   $$\dim(R/(x)) = \dim(R) - 1.$$

   Portanto, pelo Teorema 3.4.3 parte 4, temos que $R/(x)$ é um anel local e regular se, e somente se, $\mu(\mathfrak{m}/(x)) = \dim(R) - 1$. Além disso, como $R$ é um anel local e regular temos que, $\mu(\mathfrak{m}) = \dim(R)$. Por outro lado, por definição, temos que $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right)$ e então, segue que $\mu(\mathfrak{m}/(x)) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}/(x)}{(\mathfrak{m}/(x))^2}\right) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+(x)}\right)$. Também, temos uma sequência exata:

   $$0 \to \frac{\mathfrak{m}^2+(x)}{\mathfrak{m}^2} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+(x)} \to 0,$$

   Se $x \notin \mathfrak{m}^2$, então $\frac{\mathfrak{m}^2+(x)}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{(x)}{\mathfrak{m}^2 \cap (x)}$ é um subespaço vetorial de dimensão 1 gerado por $x$ modulo $\mathfrak{m}^2$. Logo com a sequência exata temos,

$$\dim(R) = \mu(\mathfrak{m}) = \dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+(x)}{\mathfrak{m}^2}\right) + \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+(x)}\right).$$

Portanto, $\mu(\mathfrak{m}/(x)) = \dim(R) - 1$. Que implica que $R/(x)$ é relular
($\Rightarrow$) Como $\mu(\mathfrak{m}) = \dim(R)$ e $\mu(\mathfrak{m}/(x)) = \dim(R) - 1$, pela sequência exata acima, temos que

$$\dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+(x)}{\mathfrak{m}^2}\right) = 1$$

o qual $x \notin \mathfrak{m}^2$, caso contrário $\dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+(x)}{\mathfrak{m}^2}\right)$ sería nula. Com isto provamos o resultado.

2. $R/I$ é um anel local, Noetheriano e regular se, e somente se,

$$\dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2}\right) = \operatorname{codim}(I).$$

**Prova:** Temos uma sequência exata curta:

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+I} \to 0.$$

E então, segue que:

$$\dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2}\right) + \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+I}\right). \qquad (*)$$

Suponha que $R/I$ é anel local e regular. Então, por definição, temos que: $\mu(\mathfrak{m}/I) = \dim(R/I)$. Por outro lado,

$$\mu(\mathfrak{m}/I) := \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}/I}{(\mathfrak{m}/I)^2}\right) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+I}\right).$$

Uma vez que $R$ é anel regular, temos que: $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \dim(R)$. Portanto, por $(*)$, obtemos que:

$$\dim(R) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2}\right) + \dim(R/I).$$

Logo, $\dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2}\right) = \dim(R) - \dim(R/I) = \operatorname{codim}(I)$.
Reciprocamente, se $\operatorname{codim}(I) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}^2+I}{\mathfrak{m}^2}\right)$ temos, por $(*)$, que:

$$\dim(R) = \dim(R) - \mu(\mathfrak{m}/I) + \dim(R/I),$$

e então, $\mu(\mathfrak{m}/I) = \dim(R/I)$ e desta forma, $R/I$ é um anel local e regular.

3. Para qualquer ideal primo $\mathfrak{q} \in R$, temos que a localização $R_{\mathfrak{q}}$ também é um anel local, Noetheriano e regular.
   **Prova:** Seja $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ um ideal qualquer. Pela parte 2 do Teorema 3.4.3 temos que: $\operatorname{pdim}_R(R/\mathfrak{q}) < \infty$. Uma vez que localização é um $R$-módulo plano, nós também temos, pela definição, que $\operatorname{pdim}_{R_{\mathfrak{q}}}\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{q}} < \infty$. Além disso, $\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{q}}$ é o corpo residual de $R_{\mathfrak{q}}$. Desta forma, pela parte 1 do Teorema 3.4.3, temos que $R_{\mathfrak{q}}$ é um anel local e regular.
4. Se $\hat{R}$ é o completamento $\mathfrak{m}$-ádico de $R$, então $R$ é um anel local, Noetheriano e regular se, e somente se, $\hat{R}$ é um anel local, Noetheriano e regular.
   **Prova:** Suponha que $R$ é regular. Pela parte 1 do Teorema 3.4.3, temos que $\operatorname{pdim}_R(k) < \infty$. Uma vez que $\hat{R}$ é um $R$-módulo plano, e, por $k$ ser $R$-módulo livre, temos que:

$$\hat{k} = k \otimes_R \hat{R} = k \otimes_R \varprojlim_{t\in\mathbb{N}} R/\mathfrak{m}^t = \varprojlim_{t\in\mathbb{N}} \left(R/\mathfrak{m} \otimes_R R/\mathfrak{m}^t\right) = \varprojlim_{t\in\mathbb{N}} R/\mathfrak{m} = k,$$

   segue, pela definição, que $\operatorname{pdim}_{\hat{R}}(k) < \infty$, e portanto, pela parte 1 do Teorema 3.4.3, temos que $\hat{R}$ é um anel local e regular.
   Agora, suponha que $\hat{R}$ é um anel local e regular. Fixemos uma resolução livre minimal $\mathbf{F}_\bullet$ de $k$ sobre $R$:

$$\mathbf{F}_\bullet : \ldots \to F_i \xrightarrow{\phi_i} F_{i-1} \to \ldots \to F_1 \to R \to k \to 0.$$

   Vamos aplicar $\hat{R} \otimes_R -$ à resolução $\mathbf{F}_\bullet$ para obter a sequência exata (pois $\hat{R} \otimes_R -$ é funtor exato à direita):

$$\hat{\mathbf{F}}_\bullet : \ldots \to \hat{F}_i \xrightarrow{\hat{\phi}_i} \hat{F_{i-1}} \to \ldots \to \hat{F}_1 \to \hat{R} \to \hat{k} \to 0.$$

   Além disso, para cada $i$, $\hat{F}_i$ é um $\hat{R}$-módulo livre e $\hat{\phi}_i\left(\hat{F}_i\right) \subseteq \hat{m}\hat{F_{i-1}}$, de modo que $\hat{\mathbf{F}}_\bullet$ é também uma resolução livre minimal. Como $\hat{R}$ é anel local e regular temos que, $\operatorname{pdim}_{\hat{R}}\left(\hat{k}\right) < \infty$, de modo que $\hat{\mathbf{F}}_\bullet$ é limitada, ou seja, $\hat{R} \otimes_R F_i = 0$, para todo $i > \operatorname{pdim}_{\hat{R}}\left(\hat{k}\right)$; como estamos no caso local, ou seja, $R$ é um anel local, e $\hat{R}$ é não trivial, segue que $F_i = 0$, para $i$ suficientemente grande. Portanto, $\mathbf{F}_\bullet$ é limitada e consequentemente $\operatorname{pdim}_R(k) < \infty$. Pela parte 1 do Teorema 3.4.3, temos que $R$ é um anel local e regular.
5. Seja $(S, \mathfrak{n}, l)$ um anel local e Noetheriano, e seja $\phi : (R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{n}, l)$ um homomorfismo plano de anéis. Se $\bar{S} = S/\mathfrak{m}S$ é um anel local, Noetheriano e regular, então $S$ é um anel local e regular.
   **Prova:** Temos por hipótese que $S$ é um $R$-módulo plano e que $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{n}$. Pela parte 3 do Teorema 3.4.3, temos que existe uma sequência regular $x_1, \ldots, x_d$ em $R$ tal que $(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}$ (pois $R$ é um anel regular). Visto que, por hipótese, $\bar{S}$ é regular temos, pela parte 4 do Teorema 3.4.3, que existem $\bar{y_1}, \ldots, \bar{y_n} \in \bar{S}$, formando uma sequência regular e tal que $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}S = (\bar{y_1}, \ldots, \bar{y_n})$; desta forma, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}S, y_1, \ldots, y_n)$. Com isso, já temos que $y_1, \ldots, y_n \in S$ formam, pela definição, uma sequência regular em $S$, e que $\mathfrak{n} = ((\phi(x_1), \ldots, \phi(x_d)), y_1, \ldots, y_n)$. Assim, pelo Teorema 3.4.3 é suficiente mostrar que $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_d)$ formam uma sequência regular em $S$. Além disso, pelo Teorema 3.2.12 parte 4, somente é necessário mostrar que $\mathrm{H}_i(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_d); S) = 0, \ \forall\, i \geq 1$.

Por uma mudança de base (Observação 3.2.14), temos que

$$\mathrm{H}_i(\phi(x_1),\ldots,\phi(x_d);S) = \mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_d;R)\otimes_R S,$$

uma vez que $S$ é plano sobre $R$, e também uma vez que $x_1,\ldots,x_d$ é sequência regular em $R$ segue, pelo Teorema 3.2.12 parte 3, que $\mathrm{H}_i(x_1,\ldots,x_d;R)=0,\ \forall\, i\geq 1$. Temos então o resultado.

6. Se $R$ é um anel regular e Noetheriano, não necessariamente local, então $R[x_1,\ldots,x_n]$ é um anel Noetheriano e regular.
**Prova:** Por indução, é suficiente mostrar que $R[x]$ é um anel Noetheriano e regular. Uma vez que $R$ é um anel Noetheriano segue, pelo Teorema da Base de Hilbert, que $R[x]$ é um anel Noetheriano. Seja então $Q\in \mathrm{Spec}(R[x])$, e $Q\cap R=\mathfrak{q}$. Por definição, somente precisamos mostrar que $R[x]_Q$ é um anel local e regular. Já temos que é local.
Agora, primeiro localizando $R$ com relação ao conjunto multiplicativamente fechado $R\setminus\mathfrak{q}$ podemos, sem qualquer perda de generalidade, considerar que $R$ é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Assim, temos um homomorfismo de anéis:

$$(R,\mathfrak{m})\to\left(R[x]_Q,\mathfrak{n}\right). \quad (*)$$

Por hipótese, $R$ é um anel local e regular e então, pela parte 5 do Corolário 3.5.5, é suficiente mostrar que o mapa $(*)$ é plano e que $R[x]_Q/\mathfrak{m}R[x]_Q$ é regular. seguindo então essa linha de racíocinio, o mapa $(*)$ é plano, uma vez que $R\to R[x]$ é livre (portanto, é plano) e $R[x]\to R[x]_Q$ é plano, e a composição de planos é plano. Agora, note que $(R[x]/\mathfrak{m}R[x])_Q$ é uma localização de $k[x]$, uma vez que temos o isomorfismo:

$$R[x]/\mathfrak{m}R[x]\cong(R/\mathfrak{m})[x],$$

e $k[x]$ é um domínio de ideais principais. Para $\bar{Q}\in\mathrm{Spec}(k[x])$, nós ou temos que $\bar{Q}=0$ ou que $\bar{Q}=\left(\bar{f}\right)$, onde $f$ é um polinômio não nulo e irredutível em $R[x]$. Se $\bar{Q}=0$, então $k[x]_Q=k(x)$ é um corpo, potanto é um anel regular. Se $\bar{Q}=\left(\bar{f}\right)$, então pela parte 4 do Corolário 3.5.5 temos que, $R[x]_Q$ é um anel regular.

7. Se $R$ é um anel local, Noetheriano e regular, então temos que o anel de séries formais $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ é um anel Noetheriano, local e regular.
**Prova:** Como $R$ é regular temos, pela parte 6 do Corolário 3.5.5, que $R[x]$ é regular. Portanto, a localização $R[x]_{(x)}$ é um anel local e regular. Pela parte 4 do Corolário 3.5.5, segue que o completamento $R[\hat{x}]_{(x)}$ é um anel local e regular. Por outro lado, temos que:

$$R[\hat{x}]_{(x)}\cong R[[x]],$$

e então $R[[x]]$ é um anel local e regular.

8. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local, Noetheriano e regular, de dimensão $d$. E seja $y_1,\ldots,y_t\in\mathfrak{m}$ uma sequência regular em $R$ a qual é maximal em $\mathfrak{m}$. Então, $t=d$.
**Prova:** Por $R$ ser um anel local e regular nós já temos que $\mathrm{pdim}_R(k)=d=\dim(R)$ e desta forma, $\mathrm{pdim}_R(M)\leq d$, para qualquer $R$-módulo $M$ finitamente gerado. Pela hipótese de que $y_1,\ldots,y_t\in\mathfrak{m}$ é uma sequência regular em $R$ que é maximal em $\mathfrak{m}$, nós também temos a seguinte sequência exata curta:

$$0\to k\to R/(y_1,\ldots,y_t)\to M\to 0. \quad (*)$$

Agora, pelo Corolário 3.2.13, temos que $\text{pdim}_R(R/(y_1,\ldots,y_t)) = t$ visto que $y_1,\ldots,y_t$ é uma sequência regular. Pela sequência exata curta $(*)$, temos que:

$$t \leq \max\{\text{pdim}_R(k), \text{pdim}(M)\} = \text{pdim}_R(k) = d.$$

Consequentemente, $t \leq d$. Agora, tomando a tripla exata proveniente da sequência $(*)$:

$$\text{Tor}^R_{d+1}(k,M) \to \text{Tor}^R_d(k,k) \to \text{Tor}^R_d(k,R/(y_1,\ldots,y_t)), \qquad (*)$$

temos que o primeiro termo de $(**)$ é nulo, uma vez que $\text{pdim}_R(M) \leq d$; por outro lado, o segundo termo de $(**)$ é não nulo, visto que $\text{pdim}_R(k) = d$. Portanto, devemos ter que o $R$-módulo $\text{Tor}^R_d(k,R/(y_1,\ldots,y_t)) \neq 0$ e desta maneira, devemos ter que:

$$t = \text{pdim}_R(R/(y_1,\ldots,y_t)) \geq d = \text{pdim}_R(k).$$

Concluímos então que $t = d$, como desejado.

Vejamos agora alguns exemplos.

**Exemplo 3.5.6** Seja $R$ um anel Noetheriano, e seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de $R$. Se $\text{pdim}_R(R/\mathfrak{p})$ é finita, então a localização $R_\mathfrak{p}$ é um anel regular.

De fato, temos que $R/\mathfrak{p}$ possui uma resolução livre finita

$$\mathbf{F}_\bullet : 0 \to F_r \to \ldots \to F_0 \to R/\mathfrak{p} \to 0.$$

Então, temos que $\mathbf{F}_\bullet \otimes_R R_\mathfrak{p}$ é uma resolução livre de $(R/\mathfrak{p}) \otimes_R R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Isto implica que $\text{pdim}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) < \infty$ e como $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ é ideal maximal de $R_\mathfrak{p}$, temos que $R_\mathfrak{p}$ é um anel local, Noetheriano e regular.

**Exemplo 3.5.7** Seja $\mathfrak{p} \subset k[x_1,\ldots,x_n]$, onde $k$ é um corpo, um ideal primo. Então, a localização $K[x_1,\ldots,x_n]_\mathfrak{p}$ é um anel local, Noetheriano e regular.

lo pre-requisito⟩ **Observação 3.5.8** Seja $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ o anel de polinômios e seja $f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ um polinômio não nulo e irredutível. Considere $R = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/(f)$. Então, como todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(R)$ é da forma $\mathfrak{m} = (x_1-\alpha_1,\ldots,x_n-\alpha_n)$, com $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$, tal que $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$.

Com estas notações temos: $R_\mathfrak{m}$ é regular se, e somente se, existe $i$ tal que $\frac{\partial f(\underline{\alpha})}{\partial x_i} \neq 0$.

De fato: Nas condições anteriores, temos que $\dim(R) = n-1$. Portanto, pela definição, $R_\mathfrak{m}$ é um anel local e regular se, e somente se, $\dim_\mathbb{C}\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = n-1$. Seja $M = (x_1-\alpha_1,\ldots,x_n-\alpha_n)$ um ideal maximal em $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ tal que $M/(f) = \mathfrak{m}$. Então, temos que existe uma sequência exata curta de espaços vetoriais

$$0 \to \left(f, M^2\right)/M^2 \to M/M^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to 0.$$

Portanto, obtemos que $R_\mathfrak{m}$ é um anel local e regular se, e somente se, $\dim_\mathbb{C}\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = n-1$ se, e somente se, $f \notin M^2$, pelo Corolário 3.5.5 item $(1)$. Agora, pela expansão de Taylor, temos que:

$$f = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\underline{\alpha})}{\partial x_i}(x_i-\alpha_i)\right) + M^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\underline{\alpha})}{\partial x_i}(x_i-\alpha_i)\right) + M^2,$$

pois $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$. Desta forma, a imagem de $f$ em $M/M^2$, com base $(x_i-\alpha_i)$, é justamente $\left(\frac{\partial f(\underline{\alpha})}{\partial x_i}\right)_{1\times n}$. Portanto, temos que $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel local e regular se, e somente se, $M$ não contém $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1\times n}$ se, e somente se, existe $i$ tal que $\frac{\partial f(\underline{\alpha})}{\partial x_i}\neq 0$.

**Exemplo 3.5.9** Encontre o lugar singular $\mathrm{Sing}(R)$, onde o anel $R=k[x,y,z,u]/\left(xy-z^2\right)$, e $k$ é um corpo algebricamente fechado e tal que a característica de $k$ é diferente de dois. Isto é, devemos encontrar, por definição, todos os ideais primos $\mathfrak{p}$ de $R$ tais que a localização $R_{\mathfrak{p}}$ **não** é um anel local e regular. Para tanto, seja $f(x,y,z)=xy-z^2$. Seja $I$ o ideal de $R$ dado da seguinte forma:

$$I=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial u}\right)=(y,x,-2z,0)=(x,y,z).$$

Portanto, pela Observação 3.5.8, o lugar singular é

$$V(I)=\{(x,y,z,u-\alpha)\mid \alpha\neq 0\},$$

uma vez que $R_{\mathfrak{p}}$ **não** é um anel regular se, e somente se, $I\subseteq\mathfrak{p}$.

**Exemplo 3.5.10** O anel $k[x]/(x)^2$ não é regular. De fato, supondo que ele seja regular, temos que a localização $T=\left(\frac{k[x]}{(x^2)}\right)_{\frac{(x)}{(x^2)}}$ é um anel local e regular; no entanto, a fórmula dada na parte 2 do Corolário 3.5.5 não é satisfeita para o anel $T$, o que é uma contradição.

**Exemplo 3.5.11** Abaixo nós temos um anel que é um domínio, mas não é regular:

$$k\left[t^2,t^3\right]\cong\frac{k[x,y]}{(x^2-y^3)}.$$

### 3.5.1 Exercícios

1. Seja $\underline{x}=x_1,\ldots,x_n$ elementos em $R$. Prove que existe aplicações

$$H_i(\underline{x},M)\to \mathrm{Tor}_i^R(R/\underline{x},M)\quad\text{e}\quad \mathrm{Ext}^i_R(R/\underline{x},M)\to H^i(\underline{x},M).$$

   Quando $\underline{x}$ é uma $R$-sequência regular, estas aplicações são isomorfas.
2. Seja $R$ um anel Noetheriano e sejam $M$ e $N$ dois $R$-módulos quaisquer. Então, mostre que:

$$\mathrm{Ann}_R\left(\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\right)\supset\mathrm{Ann}_R(M)+\mathrm{Ann}_R(N).$$

3. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local, Noetheriano e regular, então $R[[x_1,x_2,\ldots,x_n]]$ também é um anel local, Noetheriano e regular.
4. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}^2$ um ideal primo. Prove que $R/\mathfrak{p}$ não é regular.
5. Encontre o lugar singular de:
   (a) $\mathbb{C}[x,y,z,u]/\left(x^2+y^2+z^2\right)$;
   (b) $\mathbb{C}[x,y,z,u]/\left(x^2+y^2+z^2,x^5-y^7\right)$;
   (c) $\mathbb{C}[x,y,z,u]/\left(x^3+y^2,y+z^2\right)$.

# IV

# Parte IV

# 4. Anéis e módulos Cohen-Macaulay

## 4.1 Um pouco de história

Anéis e módulos Cohen-Macaulay são uma classe muito rica em propriedades dentro da álgebra comutativa. Esta classe tem muitas aplicações na geometria algébrica, teoria de números e teoria de singularidade. A noção de Cohen-Macaulay, foi primeramente definida em anéis de polinômios por Macaulay em 1916. Desde então foi intensamente estudada por Cohen and Macaulay e pesquisadores recentes, para mas detalhe ver em [**Balcerzyk**], [**Bourbaki**], [**BrunsHerzog**],[**Cohen**], [**Hutchins**],[**Kunz**], [**Macaulay**],[**Matsumura**], [**Samuel**], [**Sharp**].

## 4.2 Um pouco da teoria de sequências regulares

A seguir daremos algumas definições e propiedades de sequências regulares, primos associados e suporte de módulos. As provas de algumas propriedades deixaremos como exercício para o leitor. Estas prodem ser encontradas por exemplo em [**Matsumura**], [**Hautin??**], [**BrunsHerzog**]

### 4.2.1 Relembrando notações e definições

⟨RND⟩ (a). Seja $M$ um $R$-módulo. O conjunto de divisores de zero (que são elementos de $R$) do $R$-módulo $M$, é denotado por $\mathrm{ZD}_R(M)$, e o conjunto de não divisores de zero de $R$ sobre $M$ é denotado por $\mathrm{NZD}_R(M)$, isto é, temos que

$$\mathrm{ZD}_R(M) := \{x \in R | \ \exists\, 0 \neq m \in M : xm = 0\},$$

e

$$\mathrm{NZD}_R(M) := \{x \in R | \ \forall\, 0 \neq m \in M \text{ temos que } xm \neq 0\}.$$

(b). Sejam $N$ e $P$ dois $R$-submódulos do $R$-módulo $M$. Temos o chamado **ideal colon** de $R$, o qual é dado por:

$$(N :_R P) = \{x \in R | xP \subseteq N\},$$

e o ideal de $R$ (o qual é um caso especial de ideal colon):

$$(0 :_R M) = \{x \in R | xM = 0\} := \mathrm{Ann}_R(M),$$

é o **anulador** do $R$-módulo $M$.

(c). Seja $M$ um $R$-módulo e seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ um ideal primo de $R$. Então, dizemos que $\mathfrak{p}$ é um **ideal primo associado** para $M$, se ele é um anulador de um $R$-submódulo cíclico de $M$, isto é $\mathfrak{p} = (0 :_R m)$ para algum $0 \neq m \in M$.
Denotaremos por $\mathrm{Ass}_R(M)$ o conjunto dos primos associados de $M$, isto é,

$$\mathrm{Ass}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \ \exists\, 0 \neq m \in M : \mathfrak{p} = (0 :_R m)\}.$$

(d). Em geral, se $R$ é um anel e $M$ é um $R$-módulo, é conhecido que $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p} \subseteq \mathrm{ZD}_R(M)$. Se $R$ um anel Noetheriano, então, temos que $\mathrm{ZD}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$.

(e). Seja $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ uma sequência exata de $R$-módulos. Então

$$\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M_1) \cup \mathrm{Ass}_R(M_2).$$

Em particular, se $N \subseteq M$ é um $R$-submódulo de $M$, então

$$\mathrm{Ass}_R(N) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M/N) \cup \mathrm{Ass}_R(N).$$

(f). Seja $M$ um $R$-módulo. O **suporte** de $M$ é o conjunto de todos os ideais primos $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $M_\mathfrak{p} \neq 0$, isto é, temos que:

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

?⟨f1⟩? (f1). Seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(M)\} =: V(\mathrm{Ann}(M)).$$

Para provar isto, assuma que $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$, então existe um $s \in \mathrm{Ann}(M)$ tal que $s \notin \mathfrak{p}$. Seja $m \in M$, então $sm = 0$. O qual implica $m/1 = sm/s = 0$ em $M_\mathfrak{p}$, portanto $M_\mathfrak{p} = 0$.
Para outra inclusão, se $M_\mathfrak{p} = 0$, então $R_\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(M_\mathfrak{p}) = (\mathrm{Ann}(M))_\mathfrak{p}$ o qual implica que $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$.

(g). Seja $S : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Então, temos que:

$$\mathrm{Supp}_R(M_1) \cup \mathrm{Supp}_R(M_2) = \mathrm{Supp}_R(M).$$

Para provar isto, é suficiente ver que localizações preservam sequências exatas, ou seja, o funtor localização é um funtor exato.

(h). Seja $I$ um ideal de $R$ e $M$ um $R$-módulo. Então, temos que:

$$\mathrm{Supp}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M) \cap V(I).$$

Para provar isto, é suficiente ver que localizações preservam sequências exatas. Se $M$ é um $R$-módulo **finitamente gerado**, vale a igualdade.

(i). Note que: $x \in \mathrm{NZD}_R(M)$ se, e somente se, o $R$-homomorfismo $M \xrightarrow{x.} M$ é injetivo.

A próxima definição é importante para a sequência do texto.

**Definição 4.2.1** Um elemento $x \in R$ é não divisor de zero em (ou sobre) $M$ se temos que sempre que $xm = 0$, para $m \in M$, isto implica que $m = 0$.

Uma sequência de elementos $\underline{x} = x_1, \cdots, x_n$ de $R$ é chamada de $M$-sequência fraca, ou **sequência regular fraca** sobre o $R$-módulo $M$ se $x_i$ é um não divisor de zero em $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Se, além do dito anteriormente, tivermos $\underline{x}M \neq M$, diremos que $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular, ou simplesmente $M$-sequência, ou uma **sequência regular** sobre o $R$-módulo $M$.

Temos a seguir um resultado interessante.

⟨regulralocal⟩ **Proposição 4.2.2** (a). Sejam $R$ um anel Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Se $\underline{x} = x_1, \cdots, x_n$ é uma $M$-sequência fraca com $\underline{x} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$, então $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ é uma $M_{\mathfrak{p}}$-sequência regular.

(b). Suponha que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e seja $\underline{x} \subseteq \mathfrak{m}$ uma $R$-sequência regular. Então $\underline{x}$ é uma $\widehat{R}$-sequencia regular.

*Demonstração.* Para provar as afirmações, usamos o item $(f)$ da subseção 4.2.1, e como as localizações e completamentos preservam aplicações injetivas, isto é preserva a injeção

$$x_i : M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M \to M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$$

para cada $i$, então ambas as afirmações são diretas. Pelo Lema de Nakayama temos $\underline{x}M_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}$. ■

⟨regulexa⟩ **Proposição 4.2.3** Seja $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma $M$-sequência regular fraca e seja $S : N_2 \xrightarrow{\phi_2} N_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0$ uma sequência exata de $R$-módulos. Então, a sequência:

$$N_2/\underline{x}N_2 \xrightarrow{\overline{\phi}_2} N_1/\underline{x}N_1 \xrightarrow{\overline{\phi}_1} N_0/\underline{x}N_0 \xrightarrow{\overline{\phi}_0} M/\underline{x}M \to 0$$

é, também, uma sequência exata de $R$-módulos.

*Demonstração.* Para demonstrar, é suficiente provar quando temos $n = 1$ e $x \in R$ é uma $M$-sequência regular fraca. Como o produto tensorial preserva sequência exata à direita, segue que:

$$N_2 \otimes R/\underline{x}R \xrightarrow{\overline{\phi}_2} N_1 \otimes R/\underline{x}R \xrightarrow{\overline{\phi}_1} N_0 \otimes R/\underline{x}R \xrightarrow{\overline{\phi}_0} M \otimes R/\underline{x}R \to 0$$

é uma sequência exata à direita. Portanto, é suficiente provar que o núcleo de $\overline{\phi}_1$ está contido na imagem de $\overline{\phi}_2$, isto é, $\ker(\overline{\phi}_1) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{\phi}_2)$.

Seja $\overline{y} \in \ker(\overline{\phi}_1)$ se, e somente se $\overline{\phi}_1(\overline{y}) = 0$ se, e somente se $\phi_1(y + xN_1) = 0$, então $\phi_1(y) = xz$ para algum $z \in N_0$. Segue que $0 = \phi_0(\phi_1(y)) = \phi_0(xz) = x\phi_0(z)$. Como $x$ é uma $M$-sequência regular fraca, então $\phi_0(z) = 0$. Como a sequência $S$ é exata à direita, temos que $z = \phi_1(y')$ para algum $y' \in N_1$. Então, segue que $\phi_1(y - xy') = 0$, e logo $y - xy' \in \mathrm{Im}(\phi_2)$. Com isto, concluimos que $\overline{y} \in \mathrm{Im}(\overline{\phi}_2)$. ■

**Exemplo 4.2.4** Seja $k$ um corpo e seja $R = k[x_1,\ldots,x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes em $k$ nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$; nestas condições, temos que $\underline{x} = x_1,\ldots,x_n$ é uma $R$-sequência regular.

O próximo exemplo mostra que, em geral, sequências regulares não se preservam em permutações.

**Exemplo 4.2.5** Seja $k$ um corpo e seja $R = k[x,y,z]$ o anel de polinômios com coeficientes em $k$ e nas variáveis $x$, $y$, $z$; prove que $x, y(1-x), z(1-x)$ é uma $R$-sequência regular, mas $y(1-x), z(1-x), x$, não é uma $R$-sequência regular. De fato, $z(1-x)$ não é $R$-regular em $R/(y(1-x))$, pois sendo $z(1-x)y = zy - zxy = zy - zy = 0$, desde que $y = xy$, segue que: $z(1-x)y = 0$, para $y \neq 0$.

Observe que, se $x_1,\ldots,x_n$ é uma $M$-sequência regular então $x_1,\ldots,x_i$ é também uma $M$-sequência regular para $i \leq n$.

?⟨power1⟩? **Lema 4.2.6** Seja $x_1,\ldots,x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular, as seguintes condições são satisfeitas.

1. Se $x_1m_1 + \cdots + x_nm_n = 0$, $m_i \in M$, então $m_i \in x_1M + \cdots + x_nM$ para todo $i$;
2. $x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n} \in R$ é uma $M$-sequência regular.

*Demonstração.* (1). Se $n = 1$, então $x_1m_1 = 0$ implica $m_1 = 0$ desde que $x_1$ é uma $M$-sequência regular. Em particular $m_1 \in x_1M$. Agora assumamos que é verdade para $n-1$. Como $x_n$ é não divisor de zero de $M/(x_1,\ldots,x_{n-1})M$, a condição $x_1m_1 + \cdots + x_nm_n = 0$ implica

$$m_n = x_1s_1 + \cdots + x_{n-1}s_{n-1}, \text{ para algum } s_i \in M. \tag{4.1}$$ 4.1

Portanto,

$$x_1m_1 + \cdots + x_nm_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i(m_i + x_ns_i).$$

Por indução, $m_i + x_ns_i \in x_1M + \cdots + x_{n-1}M$ para $1 \leq i \leq n-1$. Logo $m_i \in x_1M + \cdots + x_nM$, $1 \leq i \leq n-1$. Isto também é verdade para $i = n$ pela igualdade (4.1).
(2). É suficiente demonstrar que se $x_1,\ldots,x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular, então $x_1^{p_1},\ldots,x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular. Pois se for o caso, então $x_1^{p_1},\ldots,x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular, e $x_2,\ldots,x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular uma $M/x_1^{p_1}$-sequância regular, e segue $x_2^{p_2},\ldots,x_n \in R$ é uma $M/x_1^{p_1}M$-sequência regular e assim em adiante, temos $x_i^{p_i}$ é $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$-sequência regular, e $M/(x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n})M \neq 0$ desde que $M/(x_1,\ldots,x_n)M \neq 0$.
Mostremos por indução sobre $p$. Isto é óbvio para $p = 1$. Assumamos que é verdade para $p-1$. Como $x_1$ é $M$-sequência regular, então $x_1^p$ é também um $M$-sequência regular. Para $i > 1$, suponha

$$x_im = x_1^pm_1 + x_2m_2 + \cdots + x_{i-1}m_{i-1},$$

para algum $m_j$. Como $x_1^{p-1}, x_2,\ldots,x_i$ é uma $M$ sequência regular, por hipotese de indução, isto implica que

$$m = x_1^{p-1}s_1 + a_2s_2 + \cdots + x_{i-1}s_{i-1}, \text{ paraalgum } s_j \in M. \tag{4.2}$$ 4.2

Com isto obtemos,

$$0 = x_1^{p-1}(x_1m_1 - x_is_1) + x_2(m_2 - x_is_2) + \cdots + x_{i-1}(m_{i-1} - x_is_{i-1}).$$

Pelo item (1), temos

$$x_1m_1 - x_is_1 \in x_1^{p-1}M + x_2M + \cdots + x_{i-1}M.$$

Segue que $x_is_1 \in x_1M + \cdots + x_{i-1}M$. Logo por regularidade $s_1 \in x_1M + \cdots + x_{i-1}M$ e pela igualdade (4.2) temos que $m \in x_1^pM + x_2M + \cdots + x_{i-1}M$. Isto mostra que $x_i$ é $M/(x_1^{p_1}, \ldots, x_{i-1})M$-sequência regular. ■

⟨permu1⟩ **Lema 4.2.7** Seja $R$ um anel Noetherianos e $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Para $\underline{x} = x_1 \ldots, x_n \in \mathrm{Jac}(R)$, as seguintes condições são equivalentes:

1. $H_i(\underline{x}, M) = 0$ para cada $i > 0$;
2. $H_1(\underline{x}, M) = 0$;
3. $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular;
4. $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular fraca.

*Demonstração.* As implicações $(1) \Longrightarrow (2)$ e $(3) \Longrightarrow (4)$ são imediatas, enquanto $(4) \Longrightarrow (1)$ segue do Teorema 3.2.12 item (3).

Vamos provar agora $(2) \Longrightarrow (3)$. Como $\underline{x}$ é uma sequência no radical de Jacobson de $R$ e $M$ é não nulo, pelo Lema de Nakayama implica que $M/\underline{x}M \neq 0$. Logo, é suficiente mostrar que $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular fraca. Por indução sobre $n$. O caso $n = 1$ é obvio, pois $\mathrm{H}_1(x_1, M) = \mathrm{Ann}(x_1) = (0 :_M x_1)$. Agora suponhamos que $n > 1$ e seja $\underline{x'} = x_1 \ldots, x_{n-1}$, aplicando a sequência exata 3.2 da Observação 3.2.1 item (4) obtemos

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{H}_1(\underline{x'}, M)}{x_n\mathrm{H}_1(\underline{x'}, M)} \longrightarrow \mathrm{H}_1(\underline{x}, M) \longrightarrow \mathrm{Ann}_{\mathrm{H}_0(\underline{x'}, M)}(x_n) \longrightarrow 0$$

pela hipotese $\mathrm{H}_1(\underline{x}, M) = 0$ implica que

$$\mathrm{H}_1(\underline{x'}, M) = 0 = \mathrm{Ann}_{\mathrm{H}_0(\underline{x'}, M)}(x_n).$$

A primeira igualdade, segue pelo fato que $x_n \in \mathrm{Jac}(M)$ e $\mathrm{H}_1(\underline{x'}, M)$ é um $R$-módulo finitamente gerado (pois é quociente de submódulos finitamente gerados), podemos usar o Lema de Nakayama para obtermos que $\mathrm{H}_1(\underline{x'}, M) = 0$. Usando a hipótese de indução $\underline{x'}$ é uma sequência regular fraca e com a segunda igualdade mostramos que $x_n$ é não divisor de zero em $\mathrm{H}_0(\underline{x'}, M) = M/\underline{x'}M$ e finaliza a prova.

■

O próximo corolário, nos mostra que no caso local e Noehteriano, as sequências regulares podem ser permutadas a vontade e sem "medo" que elas continuam sendo sequências regulares.

?⟨permu⟩? **Corolário 4.2.8** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma $M$-sequência regular em $\mathfrak{m}$. Então, qualquer **permutação** de $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular.

*Demonstração.* Usando o Lema 4.2.7 e o fato que o complexo de Koszul é invariante por permutações, temos o resultado. ■

## 4.3 Grau, profundidade e dimensão projetiva

A seguir, estudaremos alguns dos invariantes mais importantes na álgebra homológica, álgebra comutativa e geometria algébrica.

**Definição 4.3.1** Seja $M$ um $R$-módulo, onde $R$ é um anel Noetheriano. Uma sequência de elementos $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ em $I$ é chamada de $M$-**sequência regular maximal** em $I$, se ela é uma sequência regular sobre o $R$-módulo $M$ e se qualquer $y \in I$ é um divisor de zero em $M/(\underline{x})M$. Em outras palavras, se $\underline{x}$ é uma sequência regular sobre $M$ e para qualquer $y \in I$, temos que a sequência de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ **não** é uma sequência regular sobre $M$.

No próximo resultado, mostraremos que toda sequência regular sobre $M$ que é maximal em $I$ com $M \neq IM$ possui o mesmo comprimento. Este comprimento será denotado por $\operatorname{grad}(I,M)$, e é o chamado **grau** de $I$ sobre $M$. Demonstraremos que $\operatorname{grade}(I,M)$ pode ser descrito em termos de anulamento do funtor $\operatorname{Ext}^i_R(-,-)$. Se $R$ é um anel local e Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$, a **profundidade** de $M$ é definida por $\operatorname{depth}(M) := \operatorname{grau}(\mathfrak{m}, M)$.

**Observação 4.3.2** Seja $R$ um anel, $I$ um ideal de $R$ e $M$ um $R$-módulo. Então $\operatorname{grad}(I,M) = 0$ se, e somente se qualquer elemento de $I$ é um divizor de zero para $M$. Por conseguinte, $\operatorname{grad}(I,M) = 0$ se, e somente se $I$ esta contido em algum primo associado de $M$.

Antes de fazer propriedades de módulos Cohen-Macaulay, relembraremos algumas propriedades elementares.

### 4.3.1 Propiedades elementares

⟨RND1⟩ A seguir, considere $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e Noetheriano com ideal máximal $\mathfrak{m}$, e com corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$ e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado.

(a). Seja $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$ uma $M$-sequência regular. Temos que: $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular maximal $\Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M/(\underline{x})M)$. De fato, pela definição, sabemos que $\underline{x}$ é uma $M$-sequência regular maximal $\Leftrightarrow \mathfrak{m} \subseteq \operatorname{ZD}_R(M/(\underline{x})M) = \operatorname{Ass}_R(M/(\underline{x})M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/(\underline{x})M)} \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$, para algum ideal primo $\mathfrak{p}$, pelo lema de "primos que evitam" (primos avoidance). Portanto $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.

(b). $\operatorname{depth}_R(M) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M)$, usando o item anterior.

(c). Observe que se tomarmos $m \in M$ de tal forma que o anulador de $m$ é $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(m)$, o mapa de $R$-módulos

$$R \xrightarrow{m} M,$$

possui como o núcleo $\mathfrak{a}$, e então induz um homomorfismo injetor de $R$-módulos $R/\mathfrak{a} \hookrightarrow M$. Reciprocamente, seja $\mathfrak{a}$ um ideal de $R$ e $\phi : R/\mathfrak{a} \hookrightarrow M$ um homomorfismo injetivo de $R$-módulos, sendo que $\phi(r+\mathfrak{a}) = m$; desta forma, temos que $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(m)$. Isto nos leva afirmar que:
$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ é um primo associado se $M$ contém um $R$-submódulo isomorfo à $R/\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m)$, para algum $m \in M$.
Em outras palavras, $Rm \cong R/\operatorname{Ann}(m)$. Se $\operatorname{Ann}(m) = \mathfrak{p}$, então $Rm \cong R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ desde que $Rm = R \cdot m \subseteq M$. Por outro lado, se $Rm \cong R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$, então $\operatorname{Ann}_R(\overline{1}) = \mathfrak{p}$ e $R \cdot \overline{1} \hookrightarrow M$, logo existe uma imagem $m$ não nula de $\overline{1}$ em $M$ tal que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(m)$, portanto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Com isto temos a seguinte equivalência: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M) \Leftrightarrow R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$.
Neste item não é necessário que $R$ e $M$ sejam Noetheriamos.

(d). $\operatorname{depth}_R(M) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M) \Leftrightarrow R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M \Leftrightarrow \operatorname{Hom}_R(k,M) \neq 0$. Pelo item anterior.

(e). $\operatorname{Hom}_R(k,M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{depth}_R(M) > 0$.

(e1). Seja $M$ é um $R$-módulo. Então $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M)$. De fato, suponha que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m)$ é ideal primo para $m \neq 0$. Então

$$Rm \cong R/\operatorname{Ann}(m) = R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$$

logo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(Rm) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M)$. Observe também que $\operatorname{Ass}_R(M)$ e $\operatorname{Supp}_R(M)$ tem os mesmos elementos minimais.
Se $M$ é um $R$-módulo Noetheriano ($R$ não necessáriamente local). Então a cardinalidade de $\operatorname{Ass}_R(M)$ é finito. Isto pela afirmação acima e pelo item $(f1)$ de 4.2.1.

(e2). Se $M = 0$, então $\operatorname{Ass}_R(M) = \emptyset$. Se $R$ é um anel Noetheriano a reciproca vale. Para mostrar isto, suponha que $M \neq 0$ e $R$ um anel Noetheriano, existe um elemento maximal $I = \operatorname{Ann}(x)$ na coleção de todos anuladores dos elementos não nulos de $M$. O ideal $I$ é própio, se $I = R$, então $x = 1 \cdot x = 0$, contradição. Se mostrarmos que $I$ é um ideal primo, teremos que $I \in \operatorname{Ass}_R(M)$, como desejado. Seja $ab \in I$ com $a \notin I$. Então $abx = 0$, então $b \in \operatorname{Ann}(ax)$. Mas $I = \operatorname{Ann}(ax) \subset \operatorname{Ann}(x)$, e pela maximalidade de $I = \operatorname{Ann}(ax)$. Consequentemente, $b \in I$.

(f). Sejam $N, M$ dois $R$-módulos (não necessáriamente local nem finitamente gerado). Então, $\operatorname{Ann}_R(N) \subseteq \operatorname{Ann}_R(\operatorname{Ext}^i_R(N,M))$ para todo $i \geq 0$. De fato, seja $x \in R$ e considere o mapa de $R$-módulos, que é dado por:

$$\phi : N \xrightarrow{x} N,$$

este mapa induz um outro mapa

$$\operatorname{Ext}^i_R(\phi, M) : \operatorname{Ext}^i_R(N,M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^i_R(N,M),$$

Portanto, assumindo que $x \in \operatorname{Ann}_R(N)$, a aplicação $\phi$ é nula e isto implica que a plicação $\operatorname{Ext}^i_R(\phi, M)$ também é nula, ou seja, $x\operatorname{Ext}^i_R(N,M) = 0$.

ltration modulo⟩ **Proposição 4.3.3** Seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado, e $R$ ume anel Noetheriano. Então existe uma filtração de submódulos de $M$ tal que

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

com $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$, para um primo adequado $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(R)$.

*Demonstração.* Mostraremos por indução sobre $n$. Se $n = 0$ o caso é óbvio. Suponhamos que temos escolhido $M_0, \ldots, M_{i-1}$. Se $M_{i-1} \neq M$, então $M/M_{i-1} \neq 0$, logo pelo 4.3.1 item $(e2)$ existe $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}_R(M/M_{i-1}) \subseteq \operatorname{Spec}(R)$. Lembrando que $R/\mathfrak{p}_i \hookrightarrow M/M_{i-1}$. Tomando $M_i \subseteq M$ tal que $M_i/M_{i-1} = R/\mathfrak{p}_i$ o qual é a imagem da inclusão, portanto encontramos o $M_i$ conforme queriamos. O processo termina em $M_n = M$ pelo fato que $M$ é Northeriano. ■

**Corolário 4.3.4**

1. Se $R$ é Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado sobre $R$, então $\operatorname{Ass}_R(M)$ é finito.
2. Se o $R$-módulo $M$ tem uma filtração como na proposição acima, então $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

*Demonstração.* (1) Olhando a filtração $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ e a sequência exata de $R$-módulos $0 \to M_{n-1} \to M \to M/M_{n-1} \to 0$ e pela Observação 4.2.1 item $(e)$, temos $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M_{n-1}) \cup \mathrm{Ass}_R(M/M_{n-1})$. Repetindo o processo para $M_{n-1}$ temos

$$\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}_R(M_i/M_{i-1}) = \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}_i) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}.$$

A prova de (2) segue do item anterior. ■

⟨depthKoszul⟩ **Proposição 4.3.5** Seja $R$ um anel Noetheriano, $I = (f_1, \ldots, f_n)$ um ideal de $R$ e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Assuma que $M \neq IM$, e seja $q := \sup\{i | H_i(f_1, \cdots, f_n; M) \neq 0\}$. Então qualquer $M$-sequência maximal em $I$ tem comprimento $n - q$. Em particular

$$\mathrm{grad}(I, M) = n - \sup\{i | H_i(f_1, \ldots, f_n; M) \neq 0\}.$$

*Demonstração.* Seja $x_1, \ldots, x_s$ uma $M$-sequência maximal. Devemos demonstrar $s = n - q$ por indução sobre $s$. Se $s = 0$, então qualquer elemento de $I$ é um divisor de zero para $M$. Então $I$ esta contido em algum primo associado $\mathfrak{p}$ de $M$ tal que $\mathfrak{p} = (0 : m)$ para algum $0 \neq m \in M$. Isto implica que $I \cdot m = 0$, logo $m \in H_n(f_1, \cdots, f_n; M)$ (Teorema 3.2.12 item (2) ), isto significa que $H_n(f_1, \cdots, f_n; M) \neq 0$. Portanto $q = n$ e temos $s = n - q$.

Agora assumamos que $s > 0$, então existe um elemento não divisor de zero, e consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x_1} M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0,$$

pela Proposição 3.2.10 item (2) ( que diz $\dot{I}H_i(f_1, \cdots, f_n; M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$) e Proposição 3.2.15 , temos

$$0 \longrightarrow H_i(f_1, \cdots, f_n; M) \longrightarrow H_i(f_1, \cdots, f_n; M/x_1M) \longrightarrow H_{i-1}(f_1, \cdots, f_n; M) \longrightarrow 0$$

é exata para cada $i \in \mathbb{Z}$. Isto implica

$$0 = H_{q+1}(f_1, \cdots, f_n; M) \longrightarrow H_{q+1}(f_1, \cdots, f_n; M/x_1M) \longrightarrow H_q(f_1, \cdots, f_n; M) \longrightarrow 0$$

é exata, segue $H_{q+1}(f_1, \cdots, f_n; M/x_1M) \neq 0$, e $H_i(f_1, \cdots, f_n; M/x_1M)$ se anula para $i > q + 1$. Mas $x_2, \ldots, x_s$ é uma $M/x_1M$-sequência maximal em $I$. Usando a hipotese de indução temos $q + 1 = n - (s - 1)$, e portanto, $q = n - s$. ■

⟨cordepthKoszul⟩ **Corolário 4.3.6** Com as notações da Proposição 4.3.5 as seguintes afirmações valem:

1. $f_1, \ldots, f_n$ é uma $M$-sequência regular se e somente se $\mathrm{grad}(I, M) = n$;
2. Seja $J \subset R$ um ideal e $f_1, \ldots, f_n$ uma $M$-sequênce em $J$. Então

$$\mathrm{grad}\,(J, M/(f_1, \ldots, f_n)M) = \mathrm{grad}(J, M) - n.$$

⟨depth⟩ **Lema 4.3.7** Seja $R$ um anel Noetheriano, sejam $M$ um $R$-módulo finitamente gerado e $I$ um ideal de $R$ com $IM \neq M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1). $\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = 0$, para todo $i < n$ e qualquer $R$-módulo $N$ finitamente gerado com $\mathrm{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$;

(2). $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) = 0$, para todo $i < n$;

(3). $\mathrm{Ext}^i_R(N,M) = 0$, para todo $i < n$ e algum $R$-módulo $N$ finitamente gerado com $\mathrm{Supp}_R(N) = V(I)$;
(4). $I$ contem uma $M$-sequência regular de comprimento $n$.

*Demonstração.* As implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ são obvios. Vamos provar $(3) \Rightarrow (4)$. Seja $n = 1$, pelo absurdo, assumamos primeiro que $I$ contem somente elmentos divisores de zero de $M$, isto é $I \subseteq \mathrm{ZD}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$, portanto existe um $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ talque $I \subset \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p} = (0 :_R m)$, para algum elemento $0 \neq m \in M$. Pela observação anterior (4.3.1 item $(c)$) temos que $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ é injetiva, logo $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, M) \neq 0$ localizando isto em $\mathfrak{p}$, temos que $\mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(k, M_\mathfrak{p}) \neq 0$, onde $k = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Agora como $\mathfrak{p} \in V(I) = \mathrm{Supp}(N)$ temos $N_\mathfrak{p} \neq 0$. Com isto temos que

$$\frac{N_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}} = N \otimes_R \frac{R_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}} = N \otimes_R k \neq 0$$

isto pelo Lema de Nakayama (para isto, suponha que $\frac{N_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}} = 0$, e teremos que que $N_\mathfrak{p} = 0$, que é uma contradição ao fato que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp(N)}$). Agora com isto construimos uma $R_\mathfrak{p}$-aplicação não nula

$$N_\mathfrak{p} \to \frac{N_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}} \to N \otimes_R k \to k \hookrightarrow M_\mathfrak{p}$$

portanto $\mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$ e isto implica que $\mathrm{Hom}_R(N,M) \neq 0$. O qual contradiz o fato $(3)$ para $i = 0$. Assim com isto provamos que $I$ contem um elemento $M$-regular. Em outras palavras provamos. Se $n = 1$ e $\mathrm{Hom}_R(N,M) = 0$, então existe um $x_1 \in I$ tal que não é divisor de zero em $M$.

Agora provemos por indução sobre $n$. Pela hipotese $M/IM \neq 0$, seque que se $n = 1$ fizemos acima. Supnha que é verdade para $n-1$.

Como $\mathrm{Hom}_R(N,M) = 0$, então existe um $x_1 \in I$ tal que não é divisor de zero em $M$. Com isto temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \to M \xrightarrow{x_1} M \to M/x_1M \to 0$$

consequentemente, temos uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(N,M) \xrightarrow{x_1} \mathrm{Ext}^i_R(N,M) \to \mathrm{Ext}^i_R(N, M/x_1M) \to \cdots$$

então temos que $\mathrm{Ext}^i_R(N, M/x_1M) = 0$ para todo $i < n-1$. Logo pelo hipotese de indução existe uma $M/x_1M$-sequênce regular $x_2, \ldots, x_n$. Portanto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma $M$-sequência regular.

Agora vamos demonstrar $(4) \Rightarrow (1)$. Considere $n = 1$ e seja $x_1$ uma $M$-sequência regular em $I$. Seja $N$ um $R$-módulo finitamente gerado com $\mathrm{Supp}_R(N) =: V(\mathrm{Ann}(N)) \subseteq V(I)$, logo $I \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(N)}$. Então existe um $t > 0$ tal que $I^t \subseteq \mathrm{Ann}(N)$ e $x_1^t \in \mathrm{Ann}(N)$. Agora seja $f \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ e fixando $a \in N$, desde que $x_1^t \in \mathrm{Ann}(N)$, temos que $x_1^t f(a) = f(x_1^t a) = f(0) = 0$ como $x_1^t$ é não divisor de zero em $M$, temos que $f(a) = 0$ para todo $a \in N$ logo $\mathrm{Hom}_R(N,M) = 0$.

Se $n > 1$, por indução sobre $n$ temos $\mathrm{Ext}^i_R(N, M/x_1M) = 0$ para todo $i < n-1$. Como $x_1^t$ é não divisor de zero em $M$ temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \to M \xrightarrow{x_1^t} M \to M/x_1^tM \to 0$$

com isto temos uma sequência exata longa

$$\cdots \to 0 = \mathrm{Ext}_R^{i-1}(N, M/x_1^t M) \to \mathrm{Ext}_R^i(N,M) \xrightarrow{x_1^t} \mathrm{Ext}_R^i(N,M) \to \mathrm{Ext}_R^i(N, M/x_1^t M) \to \cdots$$

para $i < n$. Portanto $x_1^t$ é não divisor de zero em $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)$ para $i < n$. Agora como $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)$ é anulado por $x_1^t$ (ver 4.3.1 item $(f)$) e $x_1^t$ é um não divisor de zero em $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)$ para $i < n$, concluimos que $\mathrm{Ext}_R^i(N,M) = 0$ para $i < n$. ■

Com este Lema provamos o seguinte corolário muito importante.

⟨depthExt⟩ **Corolário 4.3.8** Sejam $R$ um anel Noetheriano, $M$ um $R$-módulo finitamente gerado e $I$ um ideal de $R$ tal que $IM \neq M$. Então

$$\mathrm{grad}(I,M) = \inf\{i | \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

em particular se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e $I = \mathfrak{m}$, temos

$$\mathrm{depth}(M) = \inf\{i | \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}.$$

Nosso objetivo é encontrar uma relação entre profundidade e dimensão projetiva, para isto faremos um lemma muito importante em álgebra commutativa e tem um apelido "lema da profundidade."

⟨depth lemma⟩ **Lema 4.3.9** (**Lema da profundidade**) Seja $R$ um anel Noetheriano e $I$ um ideal de $R$. Considera a sequência exata curta de $R$-módulos finitamente gerados, $IM \neq M$, $IK \neq K$ e $IN \neq N$,

$$0 \to N \to M \to K \to 0$$

então

(a). $\mathrm{grad}(I,M) \geq \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,N), \mathrm{grad}(I,K)\}$;
(b). $\mathrm{grad}(I,K) \geq \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,N) - 1, \mathrm{grad}(I,M)\}$;
(c). $\mathrm{grad}(I,N) \geq \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,M), \mathrm{grad}(I,K) + 1\}$;
(d). $\mathrm{grad}(I,K) \geq \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,N), \mathrm{grad}(I,M)\} - 1$.

*Demonstração.* A sequência exata curta induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I,K) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I,N) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I,M) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I,K) \to \cdots.$$

$(a)$ Seja $t = \mathrm{grad}(I,M)$. Suponha que $t < \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,N), \mathrm{grad}(I,K)\}$, então temos que

$$\mathrm{Ext}_R^t(R/I,N) = \mathrm{Ext}_R^t(R/I,K) = 0.$$

Pela sequência exata longa acima, temos que $\mathrm{Ext}_R^t(R/I,M) = 0$ o qual o que contradiz.
$(b)$ Seja $t = \mathrm{grad}(I,K)$. Suponha que $t < \mathrm{mim}\{\mathrm{grad}(I,N) - 1, \mathrm{grad}(I,M)\}$, então temos que

$$\mathrm{Ext}_R^{t+1}(R/I,N) = \mathrm{Ext}_R^t(R/I,M) = 0.$$

Pela sequência exata longa acima, temos que $\mathrm{Ext}_R^t(R/I,K) = 0$ o qual o que contradiz.
As demonstracões de $(c)$ e $(d)$ são semelhantes. ■

⟨Madapusi10⟩ **Proposição 4.3.10** Seja $M$ um $R$-módulo fintamente gerado. Suponha $I$ um ideal do anel $R$, então podemos encontrar um $\mathfrak{p} \in V(I)$ tal que $\operatorname{grau}(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{grau}(I, M)$. Em particular, temos

$$\operatorname{grau}(I, M) = \inf\{\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) | \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

*Demonstração.* Se $IM = M$, então vemos $\operatorname{grau}(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{grau}(I, M) = \infty$, para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Suponhamos $IM \neq M$, e peguemos uma $M$-sequência regular $\underline{x}$ em $I$. Desde então $I$ não contem nenhum elemento $M/\underline{x}M$-regular, sabemos que existe $\mathfrak{p} \in Ass_R(M/\underline{x}M)$ tal que $I \subset \mathfrak{p}$. Em este caso $\underline{x}$ é também uma $M$-sequência regular maximal em $\mathfrak{p}$, e então vemos que $\operatorname{grau}(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{grau}(I, M)$.

Para a segunda afirmação, observe que, pela Proposição 4.2.2, temos que $\operatorname{grau}(\mathfrak{p}, M) \leq \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}})$. Mas, vemos que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}}/\underline{x}M_{\mathfrak{p}})$, e então $\underline{x}$ é de fato uma $M_{\mathfrak{p}}$-sequência regular maximal em $\mathfrak{p}$. Com isto temos que $\operatorname{grau}(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}})$. ■

⟨lemaele⟩ **Lema 4.3.11** Seja $M$ um $R$-módulo, $x \in R$ um elemento $R$-regular e $M$-regular. Então para cada $R/xR$-módulo $N$, temos

$$\operatorname{Tor}_i^{R/xR}(N, M/xM) \cong \operatorname{Tor}_i^R(N, M) \quad \text{e} \quad \operatorname{Ext}^i_{R/xR}(M/xM, N) = \operatorname{Ext}^i_R(M, N)$$

para todo $i$. Em particular $\operatorname{pdim}(M/xM) = \operatorname{pdim}(M)$.

*Demonstração.* Seja $F_\bullet$ uma resolucao livre de $M$ sobre $R$. Então pelo Lema 4.2.3 temos que $F_\bullet \otimes_R R/xR$ é também uma resolucao livre de $M/xM$ sobre $R/xR$, isto demonstra que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_i^{R/xR}(N, M/xM) &\cong H_i(N \otimes_{R/xR} (F_\bullet \otimes_R R/xR)) \\ &\cong H_i((N \otimes_R F_\bullet) \otimes_{R/xR} R/xR)) \\ &\cong H_i(N \otimes_R F_\bullet) \\ &\cong \operatorname{Tor}_i^R(N, M). \end{aligned}$$

A segunda igualdade, segue do fato que $\operatorname{Hom}_{R/xR}(F_{\bullet,M} \otimes_R R/xR, N) \cong \operatorname{Hom}_R(F_{\bullet,M}, N)$. ■

O lema anterior, também existe uma versão similar para o Ext na segunda variável.

?⟨corteextPro⟩? **Proposição 4.3.12** Seja $M$ um $R$-módulo. Seja $x \in R$ um não divisor de zero em $R$ e $M$. Seja $N$ um $R/xR$-módulo. Então para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Ext}^i_{R/xR}(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_R(N, M).$$

*Demonstração.* A afirmação é verdadeira para $i < -1$. Como $x$ é não divisor de zero em $M$ e $xN = 0$, temos que $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$, logo a afirmação vale cuando $i = -1$. desde a sequência exata de $R$-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot x} M \to M/xM \to 0$$

obtemos uma sequência extata longa de $R$-módulos

$$\operatorname{Hom}_R(N, M) \to \operatorname{Hom}_R(N, M/xM) \to \operatorname{Ext}^1_R(N, M) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}^1_R(N, M)$$

O módulo do lado esquerdo é nulo e o módulo do lado direiro é também nulo ( pelo fato que $xN = 0$), então

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/xM) \cong \mathrm{Ext}^1_R(N, M),$$

mas como $\mathrm{Hom}_{R/xR}(N, M/xM) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/xM)$, temos

$$\mathrm{Hom}_{R/xR}(N, M/xM) \cong \mathrm{Ext}^1_R(N, M).$$

isto prova o caso $i = 0$. Usando a sequência exata de $R$-módulos

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R \to R/xR \to 0$$

vemos que $\mathrm{pdim}_R(R/xR) \leq 1$. Agora se $L$ é um $R/xR$-módulo projetivo, então este é somando direto de um $R/xR$-módulo livre, e fazendo uso da fórmula $\mathrm{pdim}(M_1 \oplus M_2) = \max\{\mathrm{pdim}(M_1), \mathrm{pdim}(M_2)\}$ temos $\mathrm{pdim}_R(L) \leq 1$.

Consideremos a sequência exata de $R/xR$-módulos

$$0 \to Q \to L \to N \to 0$$

com $L$ um $R/xR$-módulo projetivo. Então $\mathrm{Ext}^1_{R/xR}(L, M/xM) = 0$ e $\mathrm{Ext}^2_R(L, M) = 0$ pois $\mathrm{pdim}_R(L) \leq 1$. Usando o funtor $\mathrm{Ext}_R$ associamos, associado a $0 \to M \xrightarrow{\cdot x} M \to M/xM \to 0$, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(L, M/xM) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q, M/xM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1_R(L, M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(Q, M) \end{array}$$

que induz um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{R/xR}(L, M/xM) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R/xR}(Q, M/xM) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{R/xR}(N, M/xM) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Ext}^1_R(L, M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(Q, M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_R(N, M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

pelos diagramas e pelo caso $i = 1$ tratado acima, temos $\mathrm{Ext}^1_{R/xR}(N, M/xM) \cong \mathrm{Ext}^2_R(N, M)$.

Agora assumamos $i > 1$. Peguemos uma resolução projetiva $L_\bullet$ de $R/xR$-módulos de $N$, e seja $T = \mathrm{Im}(L_{i-1} \to L_i)$. Assim temos uma sequência exata de $R/xR$-módulos

$$0 \to T \to L_{i-2} \to \cdots \to L_0 \to N \to 0.$$

Pelo Lemma 2.8.4, temos

$$\mathrm{Ext}^i_{R/xR}(N, M/xM) \cong \mathrm{Ext}^1_{R/xR}(T, M/xM).$$

Pelo caso $i = 1$ tratado acima, temos

$$\mathrm{Ext}^1_{R/xR}(N, M/xM) \cong \mathrm{Ext}^2_R(T, M).$$

Agora para qualquer $i$, o $R/xR$-módulo $L_i$ é projetivo, e nos temos visto que isto implica que $\mathrm{pdim}_R(L_i) \leq 1$. Considerando a sequência exta acima como $R$-módulo, pelo Lema 2.8.4 (dimensão deslocada) obtemos

$$\mathrm{Ext}^2_R(T,M) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_R(N,M)$$

com isto concluimos a prova.

■

⟨corteext⟩ **Corolário 4.3.13** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo. Seja $x \in \mathfrak{m}$ um não divisor de zero em $M$ e em $R$. Então

$$\mathrm{idim}(M/xM) + 1 = \mathrm{idim}(M).$$

*Demonstração.* O resultado segue pelo Corolário 2.9.5 e a Proposição 4.3.13. ■

⟨Madapusi10.4.4⟩ **Corolário 4.3.14** Seja $R$ um anel Noetheriano, e $M$, $N$ dois $R$-módulos finitamente gerados. Se $\underline{x} = x_1,\ldots,x_n$ é uma $M$-sequência regular em $\mathrm{Ann}_R(N)$, então $\mathrm{Ext}^n_R(N,M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/\underline{x}M)$.

*Demonstração.* A prova é por indução sobre $n$, o caso $n = 1$ foi feito na proposição acima e temos também $\mathrm{Ext}^n_R(N,M) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M/x_1M)$. Agora por hipotese de indução, temos $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M/x_1M) \cong \mathrm{Hom}_R(N,M/\underline{x}M)$, pelo fato que $x_2,\ldots,x_n$ é $M/x_1M$-sequência regular em $\mathrm{Ann}_R(N)$ de comprimento $n-1$. ■

⟨lemmafree⟩ **Lema 4.3.15** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano, e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Se $\mathrm{depth}(R) = 0$ e $\mathrm{pdim}(M) < \infty$, então $M$ é livre.

*Demonstração.* Suponhamos que $\mathrm{pdim}(M) \leq n$. Demonstremos o lemma por indução sobre $n$. O caso $n = 0$ segue pelo Lema 2.10.2.

Caso $n = 1$. Seja $m_1,\ldots,m_s \in M$ conjunto mínimo de geradores de $M$. Seja $f : R^s \to M$ dado por $f(r_1,\ldots,r_s) = \sum_i r_i m_i$. Pela Proposição 3.1.6 implica que $K = \mathrm{Ker} f \subseteq \mathfrak{m}R^s$. Alem disso temos a sequência exata curta de $R$-módulos

$$0 \to K \xrightarrow{g} R^t \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Como $n = 1$, temos que $K$ é um $R$-modulo projetivo. Agora novamente pelo Lema 2.10.2 $K \cong R^t$ para algun $t$. Então, nos podemos encontrar um homomorfismo injetivo $g : R^t \to R^s$ al que $\mathrm{Im}(g) = K \subseteq \mathfrak{m}R^s$. Seja $e_1,\ldots,e_t$ a base anônica de $R^t$.

Suponhamos que $t \neq 0$. Então $g$ é representado por uma matriz $(a_{ij})$ de ordem $s \times t$. As colunas desta matriz são elementos de $K \subseteq \mathfrak{m}R^s$. Assim $a_{ij} \in \mathfrak{m}$. Como $\mathrm{depth}(R) = 0$, existe um elemento $0 \neq r \in R$ tal que $\mathfrak{m}r = 0$. Isto implica que $a_{ij}r = 0$ para todo $i,j$. Consequêntement, $0 \neq re_1 \in \mathrm{Ker}(g) = 0$, isto é uma contradição. Portanto $t = 0$ e assim $\mathrm{Ker}(f) = K = R^t = 0$. Consequêntemente, $f$ é um isomorfismo e $M$ é um $R$-módulo livre. Assumamos que $n > 1$ e sempre que $N$ seja um $R$-módulo finitamente gerado tal que $\mathrm{pdim}(N) < n$, teremos que $N$ é livre. Suponhamos que $M$ não seja livre. Então $\mathrm{pdim}(M) \geq 1$. Como $\mathrm{pdim}(M) < \infty$ e da sequência exata

$$0 \to K \to R^t \xrightarrow{f} M \to 0$$

onde $K = \mathrm{Ker}(f) \subseteq R^t$ temos que $\mathrm{pdim}(K) = \mathrm{pdim}(\mathrm{M}) - 1 < n$. Assim, pela hipotesis de indução temos que $K$ é livre. Assim da sequência exata, implica que $\mathrm{pdim}(M) \leq 1$. Agora pelo caso $n = 1$ implica que $M$ é livre, isto é uma contradição. Assim, mostramos que $M$ é livre.

■

Agora depois de tantos lemas estamos preparados para enunciar e demonstrar o famos teorema de Auslander-Buchsbaum fórmula.

⟨A-B⟩ **Teorema 4.3.16** (**A formula de Auslander-Buchsbaum**) Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local, $M \neq 0$ um $R$-módulos finitamente gerado tal que $\mathrm{pdim}(M) < \infty$. Então

$$\mathrm{depth}(M) + \mathrm{pdim}(M) = \mathrm{depth}(R).$$

*Demonstração.* Faremos a demonstracao por inducao sobre $\mathrm{depth}(R)$. Por hipotese, suponhamos que $\mathrm{pdim}(M) = n$. Assim, como $M$ é finitamente gerado, então ela tem uma resolução minimal

$$F_\bullet : 0 \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-2} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_0} F_0 \to 0.$$

Suponha $\mathrm{depth}(R) = 0$. Então, pelo Lemma 4.3.15, suponhamos que $M$ não for livre. Logo $\mathrm{pdim}(M) = 0$ e $\mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(R^n) = \mathrm{depth}(R) = 0$, segunda igualdade é pelo lema da profundidade 4.3.9.

Suponhamos que $\mathrm{depth}(R) > 0$. Se $\mathrm{depth}(M) > 0$, agora pela Observação 4.3.1 item $(b)$ e como $R$ é local, temos que $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(R)$ e $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(M)$. Portanto podemos encontrar um $x \in \mathfrak{m}$ não divisor de zero em $R$ e $M$. Então

$$\mathrm{depth}(R/xR) = \mathrm{depth}(R) - 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{depth}(M/xM) = \mathrm{depth}(M) - 1$$

estas igualdades segue do Corolário 4.3.6 item $(2)$.

Portanto, pela hipotese de inducao sobre $\mathrm{depth}(R)$, temos

$$\mathrm{depth}(M/xM) + \mathrm{pdim}(M/xM) = \mathrm{depth}(R/xR)$$

agora pelo Lema 4.3.11 temos

$$\mathrm{depth}(M) - 1 + \mathrm{pdim}(M) = \mathrm{depth}(R) - 1.$$

Portanto, somente precisamos considerar $\mathrm{depth}(M) = 0$. Como $M$ é finitamente gerado, então podemos considera a sequência exata curta

$$0 \to K \to R^t \to M \to 0$$

tal que $\mathrm{pdim}(K) = \mathrm{pdim}(M) - 1$ e $\mathrm{depth}(K) = 1$. A primeira igualdade é pelo fato da construcao de SYZYGIES.

Agora mostremos que $\mathrm{pdim}(K) = 1$. Pelo Lema da profundidade 4.3.9 e a sequência exata acima

$$\mathrm{depth}(K) \geq \mathrm{mim}\{\mathrm{depth}(R^t), \mathrm{depth}(M) + 1\} = 1$$

e

$$0 = \text{depth}(M) \geq \text{mim}\{\text{depth}(K)-1, \text{depth}(R^t)\} = \text{depth}(K)-1$$

então $\text{depth}(K) = 1$. Agora estamos no caso em que depth $> 0$. Agora este caso ja tinhamos demonstrado. Assim

$$\text{depth}(K) + \text{pdim}(K) = \text{depth}(R)$$

logo

$$1 + \text{pdim}(M) - 1 = \text{depth}(R).$$

Com isto temos

$$\text{depth}(M) + \text{pdim}(M) = \text{depth}(R)$$

o qual finaliza a demosntracao do teorema. ■

**Exemplo 4.3.17** Seja $k$ um corpo, considere $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ o anel local e $M = R/(x_1, \ldots, x_i)$ um $R$-módulo. Então $\text{pdim}(M) = i$. Como $\text{depth}(R) = n$ e $\text{depth}(M) = n - i$, então pela fórmula de Auslander-Buchsbaum 4.3.16 temos que

$$\text{pdim}(M) = n - (n-i) = i.$$

## 4.4 Aneis e módulos Cohen-Macaulay

Anéis Cohen-Macaulay e módulos Cohen-Macaulay é uma classe grande dentro os módulos finitamente gerado, é também uma classe extremamente rica em teoria. Esta classe tem muitas apliações em áreas de geometria algebraica, teoria de singularidade complexa e propiamente na álgebra comutativa.

A seguir primeiramente lembraremos a definição de dimensão de Krull de módulos. Intuitivamente, a dimensão de um $R$-módulo $M$, denotado por $\dim(M)$, vai ser medida pelo comprimento das cadeias de ideais primos, desde que os ideais primos na cadeia contribuem a $M$ no sentido de que eles pertencem ao suporte de $M$. Formalmente, definimos a dimensão de um $R$-módulo $M$ como: $\dim(M) = \dim(R/\text{Ann}M)$ se $M = 0$, e tomamos a dimensão do módulo de zero a será $-1$.

Vamos agora supor que $M$ é diferente de zero e finitamente gerado sobre o anel Noetheriano $R$. Pela Observação 4.3.1 item $(g)$, $M$ tem, pelo menos, um primo associado, e pela Observação 4.2.1 item $(g)$ podemos definir a *dimensão de um R- módulo finitamente gerado* como:

$$\dim(M) = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)\} = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)\}.$$

A primeira igualdade é pela definição e a segunda igualdade é pelo fato que os primos minimais de $\text{Supp}(M)$ e $\text{Ass}_R(M)$ são os mesmo no caso de módulos finitamente gerado.

Nesta seçao nosso anel base $(R, \mathfrak{m}, k)$ será sempre um anel Noetheriano local, e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. A seguir demonstraremos que em geral $\text{depth}(M) \leq \dim(M)$. Para provar isto, antes primeiro faremos um lema.

⟨4.4.1⟩ **Observação 4.4.1** Suponha $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Seja $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Então $\text{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{m}\} \Leftrightarrow M$ tem comprimento finito $\Leftrightarrow$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^n M = 0$.

⟨lemaCM1⟩ **Lema 4.4.2** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e sejam $M$, $N$ dois $R$-módulos não nulos finitamente gerados $R$. Então

$$\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0 \quad \text{para} \quad i<\mathrm{depth}(M)-\dim(N).$$

*Demonstração.* Seja $k=\mathrm{depth}(M)$ e $r=\dim(N)$. Provaremos por indução sobre $r$. Suponhamos que $r=0$, então $\mathrm{Ann}_R(N)$ é $\mathfrak{m}$-primário, pois $\dim(R/\mathrm{Ann}(N))=0$. Como $\mathrm{Supp}_R(N)=V(\mathrm{Ann}_R(N))=V(\mathfrak{m})$ pela Observação 4.4.1, e o Lema 4.3.7 obtemos que $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0$ para $i<\mathrm{depth}(M)$.
Agora suponhamos que $r>0$. Escolhamos uma filtração de $N=N_n\supset N_{n-1}\supset\cdots\supset N_0=\{0\}$ tal que $N_j/N_{j-1}=R/\mathfrak{p}_j$ para primos adequados $\mathfrak{p}_j\in\mathrm{Spec}(R)$ (pela Proposição 4.3.3). Com isto é suficiente provar que

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}_j,M)=0 \quad \text{para todo} \quad j \quad \text{e} \quad i<k-r.$$

pois isto implica $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0$. Para provar isto é suficiente pegar a sequência exata curta de $R$-módulos

$$0\to N_{j-1}\to N_j\to R/\mathfrak{p}_j\to 0,$$

e a sequencia exata longa

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}_j,M)\to\mathrm{Ext}^i_R(N_j,M)\to\mathrm{Ext}^i_R(N_{j-1},M)\to\cdots.$$

agora pela suposição temos que $\mathrm{Ext}^i_R(N_j,M)\cong\mathrm{Ext}^i_R(N_{j-1},M)$ para todo $i,j\in\mathbb{Z}$, de isto temos

$$\mathrm{Ext}^i_R(N,M)\cong\mathrm{Ext}^i_R(N_0,M)=0.$$

Agora vamos provar que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}_j,M)=0$ para todo $j$ e $i<k-r$.
Como $\dim(N_j/N_{j-1})\leq\dim(N)$, podemos supor que $N=R/\mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p}$ é um primo. Já que $\dim(R/\mathfrak{p})>0$, podemos escolher $x\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{p}$ e consideremos a sequência exata curta

$$0\to R/\mathfrak{p}\xrightarrow{x}R/\mathfrak{p}\to R/(\mathfrak{p},x)\to 0,$$

Como $\dim(R/(\mathfrak{p},x))<r$, por hipotese de indução temos $\mathrm{Ext}^i_R(R/(\mathfrak{p},x),M)=0$ para todo $i<k-r+1$, por outro lado temos uma sequência exata longa

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^i_R(R/(\mathfrak{p},x),M)\to\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)\xrightarrow{x}\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)\to\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M)\to\cdots.$$

Por indução $\mathrm{Ext}^i_R(R/(\mathfrak{p},x),M)=0$ para $i<k-r+1$, por outro lado como $i+1<k-r+1$ (pois $i<k-r$) temos $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/(\mathfrak{p},x),M)=0$. Então $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)=x\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)$. Agora pelo Lema do Nakayama obtemos $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p},M)=0$. ■

⟨propo7.7.3⟩ **Proposição 4.4.3** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então $\dim(R/\mathfrak{p})\geq\mathrm{depth}(M)$ para todo $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)$.

*Demonstração.* Seja $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)$, então $\mathfrak{p}=(0:_R m)$ para algum $m\in M$, pelas Observações 4.3.1 temos que existe $R/\mathfrak{p}\hookrightarrow M$, isto implica que $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{p},M)\neq 0$. Agora pelo Lema 4.4.2 temos $0\geq\mathrm{depth}(M)-\dim(R/\mathfrak{p})$.

■

Para $R$-módulos finitamente gerados, temos $\dim(M) \geq \operatorname{depth}(M)$. De fato pela definição temos $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(M)$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$ e pela proposição anterior temos a desigualdade desejada.

**Corolário 4.4.4** Seja $R$ um anel e $I$ um ideal. Então

$$\operatorname{depth}(I) \leq \operatorname{ht}(I).$$

*Demonstração.* Da Proposição 4.3.10 e o comentario anterior, pondo $M = I$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}(I) &= \inf\{\operatorname{depth}(I_\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in V(I)\} \\ &= \inf\{\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in V(I)\} \\ &\leq \inf\{\dim(R_\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in V(I)\} \\ &= \operatorname{ht}(I). \end{aligned}$$

■

A desigualdade acima da origem a seguinte definição.

⟨CM⟩ **Definição 4.4.5** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. O módulo $M$ é chamado *Cohen–Macaulay* se $M = 0$ ou $M \neq 0$ e $\dim(M) = \operatorname{depth}(M)$. Se $\dim(R) = \operatorname{depth}(M)$, chamaremos de *Cohen-Macaulay máximal* . Um anel $R$ é Cohen-Macaulay se for Cohen-Macaulay como $R$-módulo.

Dizemos que um $R$-módulo $M$ é *sem mistura ou "unmiexed"* se $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M)$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

## 4.5 Algumas caracterizações de anéis e módulos C-M

⟨teo7.7.5⟩ **Teorema 4.5.1** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel loca Noetheriano e $M \neq 0$ um $R$-módulo finitamente gerado.

(a). Seja $M$ um $R$-módulo Cohen-Macaulay. Então $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M)$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ (isto mostra que todos os ideais primos associado de um módulo CM são minimais). Alem disso, se $x \in R$, $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$, então $x$ é $M$-regular.

(b). Seja $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ uma $M$-sequência regular. Então $M$ é Cohen-Macaulay se, e somente se $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ é Cohen-Macaulay.

(c). Se $M$ é Cohen-Macaulay, então $M_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ e $\operatorname{depth}(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ se $M_\mathfrak{p} \neq 0$.

*Demonstração.* $(a)$ Pela definição, $\dim(M) = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)\}$. Por outro lado, temos $\operatorname{depth}(M) \leq \inf\{\dim(R/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)\}$, pela Proposição 4.4.3. Logo por hipotese e comparando temos,

$$\dim(R/\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(M) = \dim(M) \geq \dim(R/\mathfrak{p}), \text{ para todo } \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$$

o qual prova a primeira afirmação.

Como $\dim(M/xM) < \dim(M) = \dim(R/\mathfrak{p})$, $x \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. Caso contrário se $x \in \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, então pela Observação 4.2.1 item $(d)$, teriamos que $\dim(M) = \dim(M/xM) = \dim(R/\mathfrak{p}) - 1$, contrariando a primeira afirmação. Portanto, $x$ é $M$-regular.

$(b)$ Pelo Corolário 4.3.6 item (2), temos $\operatorname{depth}(M/(x_1,\ldots,x_r)M) = \operatorname{depth}(M) - r$, por outro lado como $\dim(M/(x_1,\ldots,x_r)M) = \dim(M) - r$ (Exercício 9 abaixo). Usando estas duas igualdades obtemos o resultado.

$(c)$ Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo. Se $\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{Ann}(M)$ então $M_\mathfrak{p} = 0$. Logo $M_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay (pela definição). Se $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}(M)$, então $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Agora pela Proposição 4.4.3, nos temos $\dim(M_\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(M_\mathfrak{p})$ e, oviamente $\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(\mathfrak{p},M)$ (pela Proposição 4.2.2 item $(1)$ ). Portanto é suficente demonstrar que

$$\dim(M_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(\mathfrak{p},M).$$

Usaremos indução sobre $\operatorname{depth}(\mathfrak{p},M)$. Se $\operatorname{depth}(\mathfrak{p},M) = 0$ então $\mathfrak{p}$ esta contido em algum primo associado de $M$. Mas $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}(M)$ e, como todos os primos associados são minimais por $(a)$, segue que $\mathfrak{p}$ é um primo associado de $M$. Isto implica que $\dim(M_\mathfrak{p}) = \dim(R_\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}(M_\mathfrak{p})) = 0$ (pelo fato que $\dim(R_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$).
Agora assumamos que $\operatorname{depth}(\mathfrak{p},M) > 0$ e escolhamos um $a \in \mathfrak{p}$, $M$-sequência regular. Então

$$\operatorname{depth}(\mathfrak{p},M/aM) = \operatorname{depth}(\mathfrak{p},M) - 1$$

(Corolário 4.3.6 item (2)). Por $(b)$, $M/aM$ é Cohen-Macaulay e, pelo lemma do Nakayama, $M/aM \neq 0$. Se $(M/aM)_\mathfrak{p} = 0$, então para algum $s \notin \mathfrak{p}$ temos que $sM = aM$. Seja $M = (m_1,\ldots,m_n)$, então, para todo $i = 1,...,n$, existe $h_{ij} \in \mathfrak{p}$ tal que $sm_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}m_j$, segue, $\det(h_{ij} - s\delta_{ij}) \in \operatorname{Ann}(\mathrm{M}) \subset \mathfrak{p}$ e, por tanto, $s \in \mathfrak{p}$, o qual é uma contradição. Nos concluimos que $(M/aM)_\mathfrak{p} \neq 0$.

Agora, por indução, nos temos $\dim((M/aM)_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(\mathfrak{p},M/aM)$. Por outro lado, $a$ é uma $M_\mathfrak{p}$-sequência regular (Proposição 4.2.2 item $(1)$) e $(M/aM)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/aM_\mathfrak{p}$. Usando o exercício 9 abaixo, mais uma vez, nos obtemos $\dim((M/aM)_\mathfrak{p}) = \dim(M_\mathfrak{p}) - 1$. Finalmente, isto implica $\dim(M_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(\mathfrak{p},M)$. ■

⟨Regular CM⟩ **Proposição 4.5.2** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular e seja $x_1,\ldots,x_d$ o cunjunto minimo de geradores de $\mathfrak{m}$. Então $x_1,\ldots,x_d$ é $R$-sequência regular, e cada $R/(x_1,\ldots,x_c)$ é um anel local regular de dimensão $d-c$. Em particular $R$ é Cohen-Macaulay.

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.4.3 e pelo Corolário 3.5.5 item $(1)$ e $(8)$. ■

Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetherian completo. Pelo teorema da estrutura de Cohen (se $R$ contem o $k$, então $R \cong k[x_1,\ldots,x_n]/I$ para algum $n$ e algum ideal $I$ de $R$), podemos escrever $R$ como o quociente de um anel local Noetheriano regular. Dizemos que $R$ é uma *interseção completa* se existe algum homomorfismo sobrejetivo $S \to R$ com $S$ um Anel local regular, de modo que o kernel é gerado por uma sequência regular, em outras palavras, se existe um anel local regular $S$ e uma sequência regular $f_1,\ldots,f_k$ em $S$ tal que $R \cong S/(f_1,\ldots,f_k)$. É mostrado que esta noção é independente da escolha da sobrejeção.

**Definição 4.5.3** (**Interseção completa**)
Seja $R$ um anel noetheriano.

1. Se $R$ é uma anel local, então dizemos que $R$ é uma *interseção sompleta* se seu completamento é uma intersecção completa no sentido acima.
2. Em geral, dizemos $R$ é uma *intersecção completa completa* se todos os seus anéis locais são interseções completas.

**Proposição 4.5.4** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local. Então $\operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}(\hat{R})$. Em particular, $R$ é Cohen-Mcaulay se, e somente se $\hat{R}$ é Cohen-Macaulay.

*Demonstração.* Seja $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_n)$ e seja $K_\bullet(x_1,\ldots,x_n,\hat{R})$ o complexo de Koszul de $\hat{R}$ como $R$-módulo e considereando $x = x_1,\ldots,x_n$ em $\hat{R}$. Nos sabemos que $\hat{R}$ é plano como $R$-álgebra, pelo Teorema 3.2.14, implica que $H_i(x,\hat{R}) = H_i(x,R) \times_R \hat{R}$. Agora pela Proposição 4.3.5 temos que $\operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}(\hat{R})$. Para provar que $\dim(R) = \dim(\hat{R})$ é suficiente ver que os polinômios de Hilbert são iguais, isto é, $HP_{\mathfrak{m}}(n,R) = HP_{\hat{\mathfrak{m}}}(n,\hat{R})$. ■

**Corolário 4.5.5** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local que é interseção completa. Então $R$ é Cohen-Macaulay.

*Demonstração.* Como existe um anel local regular $S$ e uma sequência regular $f_1,\ldots,f_k$ em $S$ tal que $R \cong S/(f_1,\ldots,f_k)$. Agora como $S$ é regular, portanto Cohen-Macaulay pela Proposição 4.5.2. Temos que $S/(f_1,\ldots,f_k)$ é Choen-Macauly pelo Teorema 4.5.1 item $(a)$. ■

**Corolário 4.5.6** Seja $K$ um corpo e $f_1,\ldots,f_k$ uma sequência regular em $R = K[x]_{(x)}$ (respeitivamente $R = K[[x]]$), onde $x = x_1,\ldots,x_n$, então $R/(f_1,\ldots,f_k)$ é Cohen-Macaulay.

?⟨Dica1⟩? **Observação 4.5.7** Observe que em geometria álgebrica é dada a seguinte definição: Dizemos que $X \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto algebrico afim de insterseção completa se e somente se $\frac{K[x]_{(x)}}{I(X)}$ é um anel de interseção completa, isto é, se somente se $\mu(I(X)) = n - \dim(X)$.

⟨Dica2⟩ **Observação 4.5.8** Seja $R$ um anel Noetheriano. Se $x \in R$ é não divisor de zero, então $\operatorname{ht}((x)) := \min\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) | (x) \subset \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\} = 1$.
Prova: Como $\operatorname{ht}((x)) \leq 1$, pelo Teorema principal de Krull. Agora basta provar a outra desigualdades. Como em um anel Noetheriano $R$ o conjunto de zero-divisores é exactamente a união das ideais primos associados ao ideal de zero $(0)$. Os ideais primos mínimas de $R$ são primos associados de $(0)$ e por isso, se $x$ não é um divisor de zero não estará contido em nenhum ideal primo mínimal de $R$ e, portanto, a $\operatorname{ht}(x) \geq 1$. Como desejado.

**Definição 4.5.9** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado de dimensão $n$. Um conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de elementos de $R$ é chamado de *sistema de parâmetros* para $M$ se $M/(x_1,\ldots,x_n)M$ tem comprimento finito.

O conjunto $\{x_1,\ldots,x_r\}$ de elementos de $R$ faz *parte de um sistema de parâmetros* se $\dim(M/(x_1,\ldots,x_r)M) = \dim(M) - r$.

⟨propo7.7.9⟩ **Proposição 4.5.10** Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay, e seja $x_1,\ldots,x_n \in R$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $x_1,\ldots,x_n$ é uma $R$-sequência regular,
2. $\operatorname{ht}(x_1,\ldots,x_i) = i$ para $1 \leq i \leq n$,
3. $\operatorname{ht}(x_1,\ldots,x_n) = n$,
4. $x_1,\ldots,x_n$ é um sistema de parámetros de $R$.

*Demonstração.* $(1) \Longrightarrow (2)$ é uma consequência do teorema primcipal de Krull, o qual diz $\operatorname{ht}(x_1,\ldots,x_i) \leq i$, e pelo fato que

$$0 < \operatorname{ht}(x_1) < \operatorname{ht}(x_1,x_2) < \cdots < \operatorname{ht}(x_1,\ldots,x_i),$$

pois $x_1,\ldots,x_i$ é uma $R$-sequência (pela Observação 4.5.8 ou Exercício 4.5.2 número 11).

$(2) \Longrightarrow (3)$ é óbvio. $(3) \Longrightarrow (4)$ é claro, finalmente, para o caso $\dim(R) = n$. Se $\dim(R) > n$ então podemos escolher $x_{n+1} \in \mathfrak{m}$ que não esta contido em nenhum ideal primo minimal de $(x_1, \ldots, x_n)$. Então $\mathrm{ht}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = n+1$. Nos podemos continuar de esta forma e obter um sistema de parámetros.

$(4) \Longrightarrow (1)$. Demonstraremos que qualquer sistema de parámetros $x_1, \ldots, x_n$ é uma $R$-sequência. Seja $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de parámetros, isto é, $n = \dim(R)$ e $\sqrt{(x_1, \ldots, x_n)} = \mathfrak{m}$. Pelo Teorema 4.5.1item $(a)$, nos obtemos $\dim(R/\mathfrak{p}) = n$ para todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ de $R$. Isto implica que $x_1 \notin \mathfrak{p}$ para todo ideal primo minimal. Mas então, pelo Teorema 4.5.1, temos que $x_1$ é $R$-regular e $R/(x_1)$ é $n-1$-dimensional anel Cohen Macaulay. As imagens de $x_2, \ldots, x_n$ em $R/(x_1)$ forma um sitema de parámetros de $R/(x_1)$. Agora, usando indução sobre $n$ nos mostramos que $x_1, \ldots, x_n$ é uma $R$-sequência. ■

⟨coro7.7.10⟩ **Corolário 4.5.11** Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel local Noetheriano Cohen-Macaulay e seja $I \subset R$ um ideal. Então

1. $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{grau}(I, R)$,
2. $\mathrm{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R)$,
3. $R$ é equidimensional.

*Demonstração.* Se $\mathrm{ht}(I) = n$, então nos podemos escolher $x_1, \ldots, x_n \in I$ tal que $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_i)) = i$ para $1 \leq i \leq n$. Usando a proposição anterior, nos vemos que $x_1, \ldots, x_n$ é uma $R$-sequência. Isto implica que $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{depth}(I, R)$. Agora $x_1, \ldots, x_s \in I$ uma $R$-sequência então $s = \mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_s)) \leq \mathrm{ht}(I)$. Isto demonstra o item $(1)$.

Prova de $(2)$. Pela definição, nos temos $\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p}$ é um ideal primo associado de $I\}$, e $\dim(R/I) = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p}$ é um ideal primo associado de $I\}$. Portanto, é suficiente provar que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$ para um ideal primo $\mathfrak{p}$. Usando $(1)$, nos temos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(\mathfrak{p}, R)$. Seja $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{p}$ uma $R$-sequência, $r = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Então pelo Teorema 4.5.1$(2)$, temos que $R/(x_1, \ldots, x_r)$ é um anel $(\dim(R) - r)$-dimensional Cohen-Macaulay.

Agora pela Proposição 4.5.10, temos $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_r)) = r = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, e portanto $\mathfrak{p}$ é um ideal primo associado minimal para $(x_1, \ldots, x_r)$. Isto implica, pelo Teorema 4.5.1$(1)$,

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R/((x_1, \ldots, x_r))) = \dim(R) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$

A prova de $(3)$ segue de 4.5.1$(1)$.

■

**Corolário 4.5.12** Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel Noetheriano local Cohen-Macaulay e seja $I = (x_1, \ldots, x_r)$ um ideal de $R$ de altura $r$. Então os primos associados de $I$ tem a mesmo altura.

*Demonstração.* Assuma $\mathfrak{p} \supset I$ um ideal primo associado. Localizando em $\mathfrak{p}$ podemos assumir que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ (Teorema 4.5.1 item $(3)$). Usando a Proposição 4.5.10 nos obtemos $x_1, \ldots, x_r$ uma $R$-sequência regular. Isto implica que $R/I$ é um anel Cohen-Macaulay ( Teorema 4.5.1 item $(b)$ ), segue $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R/I)$. Usando Corolário 4.5.11 item $(2)$, obtemos $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(I)$. ■

### 4.5.1 Comportamento de depth e extensões planas

A seguir estudaremos comportamento do depth em homomorfismo local de anéis $(R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{n}, l)$.

⟨4.5.12⟩ **Lema 4.5.13** Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo plano de anéis, e seja $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Se $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \in R$ é uma $M$-sequência regular tal que $\underline{x}(S \otimes_R M) \neq S \otimes_R M$, então a sequência $\underline{x}$ e $\varphi(\underline{x}) = \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n) \in S$ são ambos $S \otimes_R M$-sequência regular, e existem os isomorfismos

$$S \otimes_R M/\underline{x}(S \otimes_R M) \cong S \otimes_R (M/\underline{x}M) \cong S \otimes_R M/\varphi(\underline{x})(S \otimes_R M)$$

*Demonstração.* Em primer lugar, observe que a acção de $x_i$ sobre $S \otimes_R M$ é a mesma a ação de $\varphi(x_i)$, pois a ação de $x_i$ sobre $S$ é definido como sendo o mesmo que a ação de $\varphi(x_i)$. Assim, precisamos apenas mostra que $x_1, \ldots, x_n \in R$ é uma $S \otimes_R M$-sequência regular. Procedemos por indução sobre $n$.

No caso $n = 1$, temos a sequência exata curta de $R$-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot x_1} M \to M/x_1M \to 0.$$

Como $S$ é plano sobre $R$, temos a sequência exata

$$0 \to S \otimes_R M \xrightarrow{\cdot x_1} S \otimes_R M \to S \otimes_R (M/x_1M) \to 0.$$

Isto mostra que $x_1$ em $S \otimes_R M$-elemento regular, e pela seqência exata também temos

$$S \otimes_R (M/x_1M) \cong S \otimes_R M/x_1(S \otimes_R M).$$

O passo indutivo é deixado como exrecício para o leitor. ■

⟨Obs4.5.13⟩ **Observação 4.5.14** Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ um homomorfismo local e plano de anéis (isto é, $\mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$ e $S$ é um $R$-módulo plano), e seja $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Se $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$. Então $\underline{x}(S \otimes_R M) \neq S \otimes_R M$. Para Provar isto é suficiente ver que $S \otimes_R M/\underline{x}(S \otimes_R M) \cong S \otimes_R (M/\underline{x}M)$ e mostrar que $S \otimes_R (M/\underline{x}M) \neq 0$.(use o Lema de Nakayama e a hipotese). Esta observação siginifica, que no caso local de homomorfismos, não é necessário a condição $\underline{x}(S \otimes_R M) \neq S \otimes_R M$.

⟨4.5.14⟩ **Corolário 4.5.15** Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo plano de aneis. Se $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \in R$ é uma $R$-sequência regular tal que $\underline{x}S \neq S$ (isto é, se $\varphi$ é um homomorfismo local e $\underline{x}$ esta no ideal maximal de $R$), então as sequências $x_1, \ldots, x_n \in R$ e $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n) \in S$ são ambos $S$-sequências regulares.

*Demonstração.* A prova segue da Observação 4.5.14 e o Lema 4.5.13 ■

Para provar o próximo lema, faremos uso do Teorema de Interseção de Krull que diz: Seja $(S, \mathfrak{n})$ um anel local Noetherianos. Se $N$ é um $S$-módulo finitamente gerado, então $\cap_{i=0}^{\infty} I^i N = 0$ para cada ideal $I \subseteq \mathfrak{n}$.

⟨lema 4.5.15⟩ **Lema 4.5.16** Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{n}, l)$ um homomorfismo local de anéis Noetherianos. Seja $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado e $N$ um $S$-módulo fintamente gerado, plano sobre $R$. Se $\underline{y} = y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{n}$ é uma $N/\mathfrak{m}N$-sequência regular, então $\underline{y}$ é $N \otimes_R M$-sequência regular e $S$-sequência regular e $N/\underline{y}N$ um módulo plano sobre $R$.

*Demonstração.* Afirmação 1: $N \otimes_R (\mathfrak{m}^j M) \cong \mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)$ para cada $j$. Para mostra isto é suficiente usar o fato que $S$ é plano e mapa injetivo $f_j : \mathfrak{m}^j M \to M$.

Afirmação 2: para cada inteiro $j \geq 0$, existe um isomorfismo de $R$-módulos

$$\mathfrak{m}^j M/\mathfrak{m}^{j+1} M \cong k^{t_j}$$

para algum inteiro $t_j \geq 0$. Como o $R$-módulo $\mathfrak{m}^j M$ é finitamente gerado então $\mathfrak{m}^j M/\mathfrak{m}^{j+1} M = (\mathfrak{m}^j M)/\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^j M)$ é finitamente gerado. Como $R/\mathfrak{m} = k$ é um corpo, este módulo tem a forma $k^{t_j}$, como queriamos.

Afirmação 3: Para cada inteiro $j \geq 0$, existe um isomorfismo de $S$-módulos

$$[\mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)]/[\mathfrak{m}^{j+1} (N \otimes_R M)] \cong (N/\mathfrak{m}N)^{t_j} \quad \text{onde } t_j = \dim \left( \mathfrak{m}^j M/\mathfrak{m}^{j+1} M \right).$$

Consideremos a sequência exata

$$0 \to \mathfrak{m}^{j+1} M \to \mathfrak{m}^j M \to \mathfrak{m}^j M/\mathfrak{m}^{j+1} M \to 0.$$

Como $S$ é um $R$-módulo plano, a primeira linha do seguinte diagrama é exato

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N \otimes_R (\mathfrak{m}^{j+1} M) & \longrightarrow & N \otimes_R (\mathfrak{m}^j M) & \longrightarrow & N \otimes_R (\frac{\mathfrak{m}^j M}{\mathfrak{m}^{j+1} M}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow \alpha_{j+1} & & \cong \downarrow \alpha_j & & \cong \downarrow \exists \beta_j & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^{j+1} (N \otimes_R M) & \longrightarrow & \mathfrak{m}^j (N \otimes_R M) & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)}{\mathfrak{m}^{j+1} (S \otimes_R M)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

pela afirmação 1, as duas primeiras linhas são isomorfas, então a ultima linha do diagrama é exato. Com isto provamos que

$$\frac{\mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)}{\mathfrak{m}^{j+1} (N \otimes_R M)} \cong N \otimes_R (\frac{\mathfrak{m}^j M}{\mathfrak{m}^{j+1} M}).$$

de isto temos

$$\frac{\mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)}{\mathfrak{m}^{j+1} (N \otimes_R M)} \cong N \otimes_R (\frac{\mathfrak{m}^j M}{\mathfrak{m}^{j+1} M}) \overset{\text{afirmao2}}{\cong} N \otimes_R (k^{t_j}) \cong (N \otimes_R k)^{t_j} \cong (N/\mathfrak{m}N)^{t_j}.$$

Agora mostremos o resultado por indução sobre $n$.

No caso $n = 1$. Como $M$ é finitamente gerado sobre $R$, então $N \otimes_R M$ é finitamente gerado sobre $S$. Seja $\xi \in N \otimes_R M$ tal que $\xi \neq 0$ e suponha que $y_1 \xi = 0$. Pelo Teorema de Interseção de Krull implica que

$$0 = \cap_{i=0}^{\infty} (\mathfrak{m}S)^i N \otimes_R M = \cap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i N \otimes_R M$$

então a condição $0 \neq \xi \in N \otimes_R M$ implica que existe um inteiro $i \geq 0$ tal que $\xi \in \mathfrak{m}^i S \otimes_R M \setminus \mathfrak{m}^{i+1} S \otimes_R M$. O elemento

$$\overline{\xi} \in \frac{\mathfrak{m}^j (N \otimes_R M)}{\mathfrak{m}^{j+1} (N \otimes_R M)} \overset{\text{afirmao3}}{=} (N/\mathfrak{m}N)^{t_j}$$

é não nulo y anulado por $y_1$. Não entanto, como $y_1$ é $N/\mathfrak{m}N$-sequência regular, isto é também $(N/\mathfrak{m}N)^{t_j}$-sequência regular o qual é uma contradição. Assim $y_1$ é $N \otimes_R M$-sequência regular.

Observe que o caso especial $M = R$ implica que $y_1$ é $S$-sequência regular.

Seja $\overline{S} = S/y_1S$ e $\overline{N} = N/y_1N$. Mostremos que $N/\underline{y}N$ é plano. Pelo Teorema 2.7.4, é suficiente considerar uma sequência exata arbitrária

$$0 \to M_1 \to M_1 \to M_3 \to 0$$

de $R$-módulos finitamente gerados e demonstrar que

$$0 \to \overline{N} \otimes_R M_1 \to \overline{N} \otimes_R M_2 \to \overline{N} \otimes_R M_3 \to 0$$

é exata. Como $N$ é um $R$-módulo plano, temos

$$0 \to N \otimes_R M_1 \to N \otimes_R M_2 \to N \otimes_R M_3 \to 0$$

é exata Como, $y_1$ é uma $S$-sequência regular e $N \otimes_R M_3$-sequência regular, pela definição de Tor e pelo Teorema 3.2.12 item (2), temos $\operatorname{Tor}_1^S(\overline{S}, N \otimes_R M_3) \cong H_1(F_{\bullet,\overline{S}}, N \otimes_R M_3) \cong H_1(K_\bullet(y_1, N \otimes_R M_3)) \cong H_1((y_1), N \otimes_R M_3) = 0$. Com isto temos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 = \operatorname{Tor}_1^S(\overline{S}, N \otimes_R M_3) & \longrightarrow & \overline{S} \otimes_S (N \otimes_R M_1) & \longrightarrow & \overline{S} \otimes_S (N \otimes_R M_2) & \longrightarrow & \overline{S} \otimes_S (N \otimes_R M_3) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{N} \otimes_R M_1 & \longrightarrow & \overline{N} \otimes_R M_2 & \longrightarrow & \overline{N} \otimes_R M_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde as linhas verticais são isomorfas. Portanto a ultima linha do diagrama é exato, conforme desejado. Isto completa a prova para o caso $n = 1$.
O paso indutivo é rutinário. Deixamos para o leitor. ■

**Teorema 4.5.17** Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{n}, l)$ um homomorfismo local de anéis Noetherianos locais. Se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado e $N$ um $S$-módulo finitamente gerado plano sobre $R$, então

1. $\operatorname{depth}(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}_R(M) + \operatorname{depth}(N/\mathfrak{m}N)$.
   Em particular $\operatorname{depth}(M \otimes_R S) = \operatorname{depth}_R(M) + \operatorname{depth}(S/\mathfrak{m}S)$,
2. Se $\varphi$ é plano, então $\operatorname{depth}(S) = \operatorname{depth}_R(R) + \operatorname{depth}(S/\mathfrak{m}S)$,
3. $S$ é Cohen-Macaulay se, e somente se $R$ e $S/\mathfrak{m}S$ são Cohen-Macaulay.

*Demonstração.* Primeiro suponhamos que $\operatorname{depth}_R(M) = 0$ e $\operatorname{depth}_S(N/\mathfrak{m}N) = 0$. Em este caso, podemos ver desde o Corolário 4.3.8, que

$$\operatorname{Hom}_R(k, M) \neq 0, \quad \text{e} \quad \operatorname{Hom}_S(l, N/\mathfrak{m}N) \neq 0.$$

Então, do Lemma 1.3.11, vemos que

$$\operatorname{Hom}_S(k, M \otimes_R N) \neq 0,$$

e então, de novo pelo Corolário 4.3.8, vemos que $\operatorname{depth}_S(M \otimes_R N) = 0$, como esperado.

Agora podemos reducir o caso geral para esta situação, da seguinte forma. Suponha que $\underline{x}$ é um $M$-sequência regular de comprimento $r$, e $\underline{y}$ uma $N/\mathfrak{m}N$-sequência maximal de comprimento $s$. Então, temos

$$\operatorname{Ext}_R^r(k, M) \cong \operatorname{Hom}_R(k, M/\underline{x}M) \neq 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Ext}_R^s(l, N/\mathfrak{m}N) \cong \operatorname{Hom}_S(l, N'/\mathfrak{m}N') \neq 0$$

onde $N' = N/\underline{y}N$. Observe que $M' = M/\underline{x}M$ e $N'/\mathfrak{m}N'$ tem depth $= 0$.

Alem disso, por 4.5.16, $N'$ é plano. Então podemos usar o que fizemos no começo da prova para ver que

$$\mathrm{Hom}_S(l, M' \otimes_R N') \neq 0.$$

Mas, observe que

$$M' \otimes_R N' \cong M \otimes_R N/\underline{z}(M \otimes_R N),$$

onde $z = \varphi(\underline{x}), \underline{y}$.

Então vemos, por 4.3.14, que

$$\mathrm{Ext}_S^{r+s}(l, M \otimes_R N) \cong \mathrm{Hom}_S(l, M \otimes_R N/\underline{z}(M \otimes_R N)) \neq 0.$$

Agora, pra demonstrar que $\mathrm{depth}_S(M \otimes_R N) = r+s$, é suficiente provar que

$$\mathrm{Ext}_S^{r+s}(l, M \otimes_R N) = 0, \quad \text{para } \ k < r+s.$$

Para isto é suficiente provar que $\underline{z}$ é uma $M \otimes_R N$-sequência regular. Para isto, use o Lema 4.5.16, para ver que $\underline{y}$ é $M \otimes_R N/\underline{x}(M \otimes_R N)$-sequência regular, pois

$$M \otimes_R N/\underline{x}(M \otimes_R N) \cong (M/\underline{x}M) \otimes_R N.$$

Isto finaliza a demonstração.
(2) é direta, colocando $M = R$.
(3). Par Provar este item é suficiente usar as fórmulas

$$\mathrm{depth}(S \otimes_R M) = \mathrm{depth}_R(M) + \mathrm{depth}(S/\mathfrak{m}S)$$

e

$$\dim(N \otimes_R M) = \dim_R(M) + \dim(N/\mathfrak{m}N),$$

esta ultima fórmula ver em 4.5.2 exercício 14. ■

⟨singular7.8.2⟩ **Teorema 4.5.18** Sea $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular e $(S, \mathfrak{n})$ uma $R$-álgebra Noetheriano local (isto é $\mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$).

1. $S$ é $R$-módulo plano se, e somente se $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}S, S) = \dim(R)$,
2. Se $S$ é Cohen-Macaulay, então $S$ é $R$-módulo plano se, e somente se $\dim(S) = \dim(R) + \dim(S/\mathfrak{m}S)$.

*Demonstração.* (1). Seja $n = \dim(R)$ e $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Então, como $R$ é um anel regular, $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular sobre $R$. Pelo Corolário 4.5.15, $x_1, \ldots, x_n$ é também uma sequência regular sobre $S$. Isto implica que $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}S, S) = n = \dim(A)$ pela Proposição 4.3.5.

Se $\mathrm{depth}(\mathfrak{m}S, S) = \dim(R) = n$, então pela Proposição 4.3.5 implica que $H_i((x_1, \ldots, x_n), S) = 0$ para todo $i > 0$. Agora como $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n, R)$ é uma resolução livre de $R/\mathfrak{m}$, Isto implica que $\mathrm{Tor}_1(R/\mathfrak{m}, S) = H_1((x_1, \ldots, x_n), S) = 0$, portanto pelo Corolário 2.7.7 obtemos que $S$ é um $R$-módulo plano.

(2). $\Rightarrow$. É bem conhecido, que se $S$ é $R$-módulo plano, então $\dim(S) = \dim(R) + \dim(S/\mathfrak{m}S)$.
$\Leftarrow$. Suponha que $\dim(S) = \dim(R) + \dim(S/\mathfrak{m}S)$. Seja $y_1, \ldots, y_s$ uma sequência regular maximal em $\mathfrak{m}S$, isto é, $s = \mathrm{depth}(\mathfrak{m}S, S)$. Agora podemos estender esta sequência regular

maximal $y_1,\dots,y_d$ em $S$. Pela Proposição 4.3.5 e como $S$ é Cohen-Macaulay, nos temos que $d = \operatorname{depth}(S) = \dim(S)$. Por outro lado sabemos que $\dim(S/\mathfrak{m}S) = d - s$ (Exrecício 9 em 4.5.2). Finalmente isto implica que $s = \operatorname{depth}(\mathfrak{m}S, S) = \dim(R)$ e usando o item (1), obtemos que $S$ é plano.

■

⟨singular 7.8.3⟩?

**Corolário 4.5.19** Sea $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular e $(S,\mathfrak{n})$ uma $R$-álgebra finita. Suponha que todas as localizações de $S$ em ideais maximais tem as mesma dimensão. Então $S$ é Cohen-Maculay se, e somente se $B$ é um $R$-módulo livre.

*Demonstração.* Seja $\dim(R) = n$ e $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n)$. Agora, suponhamos que $S$ é Cohen-Macaulay, que é $S_\mathfrak{n}$ é Cohen-Macaulay para todos os ideais maximais $\mathfrak{n}$ de $S$. Pela suposição, temos que que $\dim(R) = \dim(S) = \dim(S_\mathfrak{n})$ para todo ideai maximai $\mathfrak{n}$. Pelo Teorema 4.5.18 item (2), $S$ é uma $R$-módulo plano, portanto, livre pelo Teorema 2.10.1.

Para mostrar a reciproca, suponhamos que $S$ é um $R$-módulo livre. Assim, $x_1,\dots,x_n$, o qual é uma sequãncia regular em $R$ (pois $R$ é regular), então pelo Corolário 4.5.15 é também uma sequência regular em $S$. Portanto,

$$\operatorname{depth}(S_\mathfrak{n}) \geq \dim(R) = \dim(S) = \dim(S_\mathfrak{n})$$

para todo ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $S$. ■

## 4.5.2 Exercícios

⟨CM⟩

1. Seja $R$ um anel Noetheriano. Se $M$ e $N$ dois $R$-módulos finitamente gerado, Mostre que
   (a) $\operatorname{Ass}_R\operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Supp}_R(M) \cap \operatorname{Ass}_R(N)$,
   (b) $\operatorname{Ass}_R\operatorname{Hom}_R(M,N) = 0$ se, e somente se $\operatorname{Ann}_R(M)$ contem um elemento $N$-regular. Dica, para a reciproca, suponha que $\operatorname{Ann}_R(M)$ não conten nenhum elemento regular então $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \cup_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(N)}\mathfrak{p}$. Logo existe um $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(N)$ tal que $\operatorname{Ass}_R(N) \subset \mathfrak{p}$, logo use o item anterior para chegar a uma contradição.
2. Seja $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ um homomorfismo local plano. Mostre que $S \otimes_R (\mathfrak{m}^j M) \cong \mathfrak{m}^j(S \otimes_R M)$ para cada $j$.
3. Seja $R$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Se $\{x_1,\dots,x_t\}$ uma $M$-sequência regular, então $\{x_1,\dots,x_t\}$ pode ser estendido para um sistema de parâmetros para $M$.
4. Seja $R$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Se $\{x_1,\dots,x_t\}$ uma $M$-sequência regular. Então $\operatorname{detht}(M) \leq \dim(M)$.
5. Seja $R$ um anel, $M$ um $R$-módulo, $I \subset R$ um ideal.
6. Se $x_1,\dots,x_n \in I$ uma $M$-sequência regular, então $x_1^m,\dots,x_n^m \in I$ uma $M$-sequência regular para todo $m \geq 0$.
7. $\operatorname{grad}(I,M) = \operatorname{grad}(\sqrt{I},M)$. Este ultimo item mostra que $\operatorname{grad}(I,M)$ é um invariante geométrico.

mudanca de base⟩?

8. Seja $\varphi(R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ um homomorfismo local de anéis, fazendo $S$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $M$ um $S$-módulo finitamente gerado. Prove que

$$\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_S(M).$$

⟨exer1⟩ 9. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Seja $x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{m}$ uma $M$-sequência regular. Prove que

$$\dim(M/(x_1,\ldots,x_n)M) = \dim(M) - n.$$

10. Seja $R$ um anel Noetheriano, $M$ um $R$-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Prove que $\operatorname{depth}(\mathfrak{p},M) \leq \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}})$.

⟨8⟩ 11. Sejam $R$ um anel Noetheriano e $x_1,\ldots,x_n$ uma $R$-sequência. Prove que

$$0 < \operatorname{ht}(x_1) < \operatorname{ht}(x_1,x_2) < \cdots < \operatorname{ht}(x_1,\ldots,x_n).$$

Dica. Use indução e a observação 4.5.8.

12. Seja $R$ um anel 0-dimensional. Prove que $R$ é Cohen-Macaulay.
13. Seja $R$ um anel reduzido 1-dimensional. Prove que $R$ é Cohen-Macaulay.

⟨ex12⟩ 14. Seja $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ um homomorfismo local de de anéis Noetherianos, suponha que $M$ é $R$-módulo fintamente gerado, e $N$ é um $S$-módulo finitamente gerado sendo plano sobre $R$. Então

$$\dim(N \otimes_R M) = \dim_R(M) + \dim(N/\mathfrak{m}N).$$

15. Seja $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ um homomorfismo local e plano de anéis, e seja $M$ um $R$-módulo não nulo finitamente gerado. Se $\underline{x} = x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{m}$. Mostre que $\underline{x}(S \otimes_R M) \neq S \otimes_R M$.
16. Um $R$-módulo $M$ é chamado *fielmente plana* se cada complexo $C_\bullet$ de $R$-módulos é exata, se e apenas se o complexo induzida $C_\bullet \otimes_R M$ é exato. Prove que $M$ é fielmente plana se e somente se $M$ é plana e $\mathfrak{m}M \neq M$ para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ em $R$.
17. Seja $\psi : R \to S$ é um *homomorfismo de anéis fielmente plana* ( isto é, $S$ é, via $\psi$, um $R$-módulo fielmente plano). Mostre que $\psi$ mapeia uma sequência regular a uma sequência regular. Em particular, se $(R,\mathfrak{m})$ e $(S,\mathfrak{n})$ são anéis locais tais que $S$ é uma $R$-álgebra plana e $\mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$, então qualquer sequência regular de elementos de $R$ permanece regular em $S$.
18. Suppose que $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ é um homomorfismo local de anéis Noetheriamos. Então, um $S$-módulo $M$ finitamente gerado é palno sobre $R$ se, e somente se $\operatorname{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m},M) = 0$.
19. Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo local plano de anéis locais Noetherianos. Então os seguintes são equivalentes
    (a) $S$ é uma interseção completa,
    (b) $R$ e $S/\mathfrak{m}S$ são interseção completa.

# Bibliografia

# Referências Bibliográficas

## Artigos


[1] H. Bass, Injective dimension in Noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 18–29.

[2] H. Bass , On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Zeitschrift 82 (1963), 8–28.

[3] I, Emmanouil. Mittag-Leffler condition and the vanishing projective limit Topology. Vol. 35, No 1, 267–271, 1996.

# Referências Bibliográficas

## Livros


[1] Cartan, H., Eilenberg, S. *Homological Algebra*. Princeton University Press, Prince-ton, New Jersey, 1956.

[2] Lang, S. Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984.

[3] Atiyah M. F. e Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[4] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1995.

[5] Gathmann, A., *Commutative Algebra, Class Notes*, 2013–2014.

[6] Ivorra Castillo, C., *Álgebra Homológica y Álgebra Conmutativa*, Universidad de Valencia.

[7] Kemper, G., *A Course in Commutative Algebra*, Springer Verlag, 2009.

[8] Matsumura, H., *Commutative Algebra*, W. A. Benhamin, 1970.

[9] Ribeiro Nogueira, J., *Anéis regulares e o teorema de Serre*. Dissertação apresentada na Universidade Federal Fluminense, 2008.

[10] HUNEKE, C. *Commutative Algebra I*, Compilation of two sets of notes at the University of Kansas, 2012.

[11] HUNEKE, C. *Commutative Algebra II*, Compilation of two sets of notes at the University of Kansas, 2012.

[12] ATIYAH, M. F.; MACDOLNAD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Plublishing Company, 1969.

[13] J. F. Andrade e A. Simis, Tópicos de Álgebra Comutativa, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1981.

[14] D.Hilbert,“Ueber die Theorie der algebraischen Formen”,Math.Ann.36:4(1890), 473–534.

[15] D. Hilbert, “Ueber die vollen Invariantensysteme”, Math. Ann. 42:3 (1893), 313– 373.

[16] Balcerzyk, S. and Józefiak, T. "Cohen-Macaulay Rings." Ch. 3 in Commutative Rings: Dimension, Multiplicity and Homological Methods. Chichester, England: Ellis Horwood, pp. 101-107, 1989.

[17] Bourbaki, N. "Anneaux de Macaulay." §2.5 in Eléments de mathématiques, Chap. 10, Algèbre Commutative. Paris, France: Masson, pp. 30-32, 1998.

[18] Bruns, W. and Herzog, J. Cohen-Macaulay Rings, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998.

[19] Cohen, I. S. "On the Structure and Ideal Theory of Complete Local Rings." Trans. Amer. Math. Soc. 59, 54-106, 1946.

[20] Hutchins, H. H. Examples of Commutative Rings. Passaic, NJ: Polygonal Publishing House, 1981.

[21] Kunz, E. "Regular Sequences, Cohen-Macaulay Rings and Modules." §6.3 in Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Boston, MA: Birkhäuser, pp. 183-191, 1985.

[22] Macaulay, F. S. The Algebraic Theory of Modular Systems. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1916.

[23] Matsumura, H. "Cohen-Macaulay rings." §17 in Commutative Ring Theory. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 133-139, 1986.

[24] Samuel, P. and Zariski, O. "Macaulay rings." §A6 in Commutative Algebra, Vol. 2. Princeton, NJ: Van Nostrand, pp. 394-403, 1958.

[25] Sharp, R. Y. "Cohen-Macaulay Rings." Ch. 17 in Steps in Commutative Algebra, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 330-344, 2000.

[26] Nicolas Bourbaki. Commutative algebra. Chapters 1–7. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[27] Nicolas Bourbaki. Elements de mathematique. Algebre commutative. Chapitres 8 et 9. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1983 original.

[28] Nicolas Bourbaki. Elements de mathematique. Algebre commutative. Chapitre 10. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1998 original.

[29] Hideyuki Matsumura. Commutative ring theory, volume 8 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[30] Jean-Pierre Serre. Local algebra. Springer Monographs in Mathematics. Springer- Verlag, Berlin, 2000. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.

# 5. Índice remissivo

# Índice Remissivo

## G



## H



## I



## M



## N



## O



## P



## R



## S



## T



## U