Famílias Resolventes e Aplicações

Aldo Pereira

Resumo

O conceito de família resolvente foi introduzido no ano 1980 [4] como uma extensão da noção de semigrupo, necessária para estudar a existência de solucões de equações integro-diferenciais de primeira ordem. Entendemos por família resolvente para este tipo de problema como uma família de operadores lineares limitados $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ a qual satisfaz outras propriedades além de ser parte da solução de tal equação. Ao longo dos anos, essa teoria foi sendo desenvolvida rapidamente. Por exemplo, se A é um operador linear fechado em um espaço X, $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ e $f : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma função contínua, a equação de Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

possui uma solução única se, e somente se, a equação admite uma família resolvente [5]. Isto é, existe uma família fortemente contínua de operadores $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ que comuta com A, além de outras propriedades, e, portanto, a solução para este problema pode ser escrita em termos da sua família resolvente por

$$u(t) = R(t)f(0) + \int_0^t R(t-s)f'(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

O exemplo anterior mostra que as soluções de certas equações abstratas podem ser escritas em termos das famílias resolventes. Outros conceitos como semigrupos integrados, famílias cosseno e seno [1], resolventes fracionárias, famílias (a,k)-regularizadas, entre outras, podem ser consideradas porque elas têm um papel crucial na representação das soluções de diversos tipos de equações. Portanto, conhecer as propriedades das famílias resolventes permite obter importantes propriedades qualitativas das soluções destas equações abstratas. O conteúdo aproximado de cada uma das sessões do minicurso é o seguinte:

- **Sessão 1:** Equações abstratas de primeira ordem [3].
- **Sessão 2:** Equações abstratas de segunda ordem [1].
- **Sessão 3:** Outros famílias resolventes e equações associadas [2].
- **Sessão 4:** Tratamento unificado [5].
- **Sessão 5:** Aplicações e propriedades.

Referências

[1] ARENDT, W.; BATTY, C.; HIEBER, M.; NEUBRANDER, F. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser, 2011.

[2] ENGEL, K.; NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, 1992.

[3] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.

[4] DA PRATO, G.; IANNELLI, M. Linear integrodifferential equations in Banach space, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 62, 207-219, 1980.

[5] PRUSS, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monographs Math. 87, Birkhäuser, 1993.