Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas

XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB

04 de janeiro a 12 de fevereiro de 2021

I Workshop de Teses e Dissertações em Matemática da UnB

25 a 27 de janeiro de 2021

Apoio:

Support: Directorate of Community Organizations Culture and Art - DOCCA/UnB
Arte inspirada: Athos Bulcão - Painel em azulejo - Ministério das Relações Exteriores, Anexo I, 8° andar, Brasília/DF.

Boas vindas

Sejam todo(a)s muito bem vindo(a)s ao evento **I Workshop de Teses e Dissertações em Matemática da UnB**. Desejamos um excelente evento.

Coordenadores

Jaqueline Godoy Mesquita (Universidade de Brasília)
Ma To Fu (Universidade de Brasília)

Comissão Julgadora

Camila Vieira, Universidade de Brasília
Daniel Ventura, Universidade Federal de Góias
Elaine Silva, Universidade Federal de Alagoas
Jhone Caldeira, Universidade Federal de Góias
Magno Oliveira, Universidade Federal de Viçosa
Valter Borges, Universidade Federal do Pará

Apoio

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Campus Universitário Darcy Ribeiro
70910-900 Brasília - DF

Conteúdo

Informações Gerais

Informações Gerais

O evento acontecerá via plataforma **Zoom**. Para acessar, clique em:

- **Link de Acesso:**
  `https://us02web.zoom.us/j/84600007963?pwd=MURBRXRWWmpRekhLaEdnWFMyNWZzZz09`
- **ID da Reunião:** 846 0000 7963
- **Senha:** 162228

Programação

Horário/Data	**25/01/2021**	**26/01/2021**	**27/01/2021**
13h30	**Abertura**		
Chair	*Jaqueline Mesquita*	*Ma To Fu*	
14h - 14h50	**Plenária de Abertura** Carlos Alberto dos Santos, UnB *"Uma overview a respeito do Programa de pós-graduação em matemática da UnB"*	**Plenária 2** Cristina Acciarri, UnB "*Os 4Ps da elaboração de projetos*"	
Chair	*Alan Gois*	*Gabriel Bufolo*	*Jaqueline Mesquita*
14h50 - 15h30	**Palestra 1** Henrique A. M. Souza *Mestrado*	**Palestra 7** Eliana Rodrigues *Doutorado*	**Plenária 3** Leandro Cioletti, UnB "*A carreira de Matemático(a): os primeiros passos*" (15h20-16h10)
15h30- 16h10	**Palestra 2** Vinicius Kobayashi *Mestrado*	**Palestra 8** Mattheus Pereira *Doutorado*	
16h10 - 16h50	**Palestra 3** Gabriela Vasconcelos Torres *Mestrado*	**Palestra 9** Carolina Lafetá *Doutorado*	**Divulgação do resultado e cerimônia de premiação**
16h50-17h10	**Break**	**Break**	**Encerramento**
17h10-17h50	**Palestra 4** John Freddy Moreno *Doutorado*	**Palestra 10** Túlio Santos *Doutorado*	
17h50-18h30	**Palestra 5** Renata Alves da Silva *Doutorado*	**Palestra 11** Felipe Quintino *Doutorado*	
18h30-19h10	**Palestra 6** Sara Raíssa *Doutorado*		

Resumos

Mestrado

Sobre Grupos P–Saturáveis

Gabriela Vasconcelos Torres (Durante a elaboração deste trabalho a autora foi bolsista do CNPq e agora é bolsista da CAPES. Em colaboração com Emerson Ferreira de Melo)
Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo sobre grupos p-saturáveis mostrando em especial que um grupo pro-p finitamente gerado livre de torção é p-saturável se, e somente se, é um PF-grupo. A partir desse resultado, passamos a avaliar subgrupos normais de tais grupos, encontrando que um subgrupo normal de um grupo p-saturável é também p-saturável quando contido no subgrupo de Frattini do grupo.

Palavras-Chave: Grupos pro-p; grupos p-saturáveis; PF-grupos; grupos p-ádicos analíticos; grupos powerful; grupos uniformemente powerful.

Referências

[1] J. Dixon, M. Du Sautoy, A. Mann, and D. Segal (2003), *Analytic Pro-P Groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.*

[2] G. Fernández-Alcober, J. González-Sánchez, A. Jaikin-Zapirain (2008), *Omega subgroups of pro-p groups*, *Israel J. Math. in press.*

[3] J. González-Sánchez (2004), *Fundamentals of the theory of groups*, *Grad. Texts Math..*

[4] J. González-Sánchez, (2007), *On p-saturable groups*, *Journal of Algebra*, 315(2):809 – 823.

[5] J. González-Sánchez (2004), *On the structure of normal subgroups of potent p-groups*, *Journal of Algebra*, 276(1):193 – 209.

[6] E. I. Khukhro (1998), *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, *Cambridge Univ. Press.*

[7] M. Lazard (1965), *Groupes analytiques p-adiques*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 26(1965):389 — 603.

[8] L. Ribes, P. Zalesskii (2000), *Profinite Groups*, *Springer.*

Dëmushkin Groups

Henrique A. M. S. Souza (`This work was supported by CAPES and CNPq. Joint work with Theo A. D. Zapata`)
Department of Mathematics
University of Brasília

Resumo

Dëmushkin groups comprise an important class of profinite groups: they are pro-p groups which satisfy a cohomological condition analogous to the classical Poincaré duality in dimension 2. They occur naturally as maximal pro-p quotients of Galois groups of local fields and pro-p completions of surface groups. The dissertation collects the proof of the Classification Theorem of Dëmushkin Groups as obtained through the works of S. Dëmushkin, J.P. Serre and J. Labute between 1961 and 1967. It also gathers, in a single source, the recent 2019 and 2020 proofs for the validity among Dëmushkin groups of Howson's property, of the existence of local retractions for topologically finitely generated subgroups and of the Hanna Neumann conjecture, following the papers published by P. Zalesskii, M. Shusterman and A. Jaikin-Zapirain, as well as the characterization of which pro-p groups satisfy M. Hall's property.

Referências

[1] S. Dëmushkin, *The group of a maximal p-extension of a local field.* Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat., volume 25, no. 3, pp. 329–346, 1961. In Russian.

[2] J.-P. Serre, *Structure de certains pro-p-groupes.* In: *Séminaire Bourbaki*, no. 8, pp. 145–155. Société mathématique de France, 1964. Talk 252, in French.

[3] J. Labute, *Classification of Demushkin Groups.* Canadian Journal of Mathematics, volume 19, pp.106–132, 1967.

[4] A. Jaikin-Zapirain e M. Shusterman, *The Hanna Neumann conjecture for Demushkin groups.* Advances in Mathematics, volume 349, pp. 1–28, 2019.

[5] M.Shusterman e P. Zalesskii, *Virtual retraction and Howson's theorem in pro-p groups.* Transactions of the American Mathematical Society, volume 373, no. 3, pp. 1501–1527, 2020.

Teoria da Bifurcação aplicada à existência e à multiplicidade de soluções para um problema quasilinear do tipo Leray-Lions

Vinicius Kobayashi Ramos (Departamento de Matemática)
Universidade de Brasília

Resumo

De início, apresentamos a Teoria de Bifurcação como uma alternativa para problemas em que não é possível utilizar o Teorema da Função Implícita.

Depois, um breve histórico sobre os teoremas de bifurcação começando com Krasnosel'skii ([6] e [5]), passamos por López Gomez ([7]), Rabinowitz ([9] e [8]), e Guowei Dai, Zhaosheng Feng ([2]).

Fazemos, então, uma introdução sobre a Teoria do Grau Topológico. A qual é ferramenta principal utilizada nos mais recentes Teoremas de Bifurcação. Começando pelo Grau Topológico de Brower e citando suas aplicações em teoremas do ponto fixo para operadores definidos sobre espaços de dimensão finita. Adicionando a condição de compacidade ao operador sobre o qual se calcula o grau, apresentamos o Grau Topológico de Leray Schauder, para operadores que agem sobre um espaço de dimensão infinita. Para o qual também mencionamos aplicações em teoremas do ponto fixo, dessa vez, para operadores definidos sobre espaços de dimensão infinita.

Partimos, então, para uma aplicação da Teoria de Bifurcação, na resolução do problema Quasi-linear, de [1],

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) &= f(\lambda, x, u), & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

com u em $C_0(\overline{\Omega})$.

Em que $A(x,u)$ é uma matriz com coeficientes Carathéodory, simétrica, limitada e com condição de coercividade. Sendo λ o parâmetro de bifurcação.

Mostramos a existência, sob certas condições impostas sobre a função f, de bifurcação a partir da curva de soluções triviais, argumentando a existência de um continuum de soluções emanando de $(\lambda_0, 0)$, em que λ_0 é o autovalor principal associado a um problema de autovalor com peso da parte linear do problema. E bifurcação no infinito, garantindo a existência de um continuum de soluções emanando de (λ_∞, ∞), em que λ_∞ é também um autovalor associado a um problema de autovalor com peso da parte linear do problema.

Por fim, apresentamos algumas aplicações desses resultados de bifurcação. As quais garantem, sob certas condições, a existência de solução para o problema, para todo $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$ e considerando outras condições sobre f, garantem a existência de duas soluções para cada $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$.

Referências

[1] D. Arcoya and B. Pellacci, Bifurcation for some quasilinear operators, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 131, 733–765, 2001.

[2] G. Dai and Z. Feng, Unilateral global bifurcation for eigenvalue problems with homogeneous operator, *IJBC*, 29, n. 6, 1950084–728, 2019.

[3] E. Dancer, Bifurcation from simple eigenvalues and eigenvalues of geometric multiplicity one, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 34, 5, 533–538, 2002.

[4] E. Dancer and R. Phillips, On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems, *Indiana University Mathematics Journal*, 23, n. 11, 1069–1076, 1974.

[5] M. A. Krasnosel'skii, *Positive solutions of operator equations*, P.Noordhoff, 1964.

[6] M. A. Krasnoselskij, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon, 1964.

[7] J. López-Gómez, *Spectral theory and nonlinear functional analysis*, 2001, CRC Press

[8] P. H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *Journal of functional analysis*, 7, n. 3, 487–513, 1971.

[9] P. H. Rabinowitz, On bifurcation from infinity, *Journal of Differential Equations*, 14, n. 3, 462–475, 1973.

Doutorado

Equações Integrais Funcionais do tipo Volterra–Stieltjes

Anna Carolina Lafetá (Em colaboração com Rogélio Grau e Jaqueline Mesquita)
Universidade de Brasília, Brasília - Brasil

Resumo

Nesse trabalho, estudamos equações integrais funcionais do tipo Volterra–Stieltjes:

$$\begin{cases} x(t) &= \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t,s)f(x_s,s)\mathrm{d}g(s), \qquad t \geq t_0, \\ x_{t_0} &= \phi, \end{cases} \tag{1}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in G([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $f : G([-r,0],\mathbb{R}^n) \times [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, $a : [t_0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $g : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $x_s : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$ é definida por $x_s(\theta) = x(s+\theta)$ e a integral ao lado direito da igualdade está no sentido de Henstock–Kurzweil–Stieltjes.

Ao longo desse trabalho, apresentaremos algumas condições a respeito das funções a e g, além de algumas condições a respeito da integral

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} b(t,s)f(x_s,s)\mathrm{d}g(s),$$

quando $b : [t_0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ é uma função regrada e $t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_0 + \sigma < d$, para algum $0 < \sigma < d - t_0$.

Essas condições garantirão a existência e unicidade de soluções locais e maximais para equação (1) e também fornecerão algumas propriedades da solução.

Além disso, apresentaremos também correspondências entre (1) e equações integrais funcionais do tipo Volterra com impulsos e equações de Volterra delta-integrais funcionais em escalas temporais.

Mais precisamente, no caso das equações com impulsos, consideraremos a seguinte formulação:

$$\begin{cases} x(t) &= \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t,s)f(x_s,s)\,\mathrm{d}g(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\} \\ t_k<t}} I_k(x(t_k)) \\ x_{t_0} &= \phi, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\{t_k\}_{k=1}^m$ são os momentos de impulso pré-fixados e cada $t_k \in [t_0,d)$, para $d \leq \infty$. Iremos supor que vale a igualdade $\Delta^+x(t_k) = I_k(x(t_k)), k = 1\ldots,m$, onde $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o operador de impulso. No caso das equações em escalas temporais, consideraremos a seguinte equação delta-integral funcional de Volterra:

$$\begin{cases} x(t) &= x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t,s)f(x_s^*,s)\Delta s, \quad t \in [t_0,t_0+\eta]_{\mathbb{T}}, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [t_0-r,t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{3}$$

onde, nesse caso, $\phi \in G([t_0-r,t_0]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^n)$.

Aqui, recordamos que uma escala temporal $\mathbb{T}$ é definida como um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ e definimos $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T}$. Além disso, definimos o conjunto $\mathbb{T}^*$ como

$$\mathbb{T}^* = \begin{cases} (-\infty, \sup\mathbb{T}], & \text{se } \sup\mathbb{T} < \infty, \\ (-\infty,\infty), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

Dado $s < \sup\mathbb{T}$, definimos $s^* := \inf\{t \in \mathbb{T} : t \geq s\}$ e, dada uma função $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, definimos sua extensão $y^* : \mathbb{T}^* \to \mathbb{R}^n$ como $y^*(s) = y(s^*)$.

As funções a, f e g, tanto no caso de equações com impulso como no caso de escalas temporais, estão relacionadas com as funções a, f e g de (1) e essas relações serão explicitadas no decorrer da apresentação do trabalho.

Por meio destas correspondências e dos resultados obtidos para as equações funcionais de Volterra-Stieltjes, podemos também estender os resultados para as equações em escalas temporais e também, as equações com impulsos.

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[2] M. Federson, R. Grau, J. G. Mesquita, Prolongation of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales, *Mathematische Nachrichten*, 292(1), 22-55, 2019.

[3] M. Federson, Š. Schwabik, Generalized ODEs approach to impulsive retarded differential equations. *Diff integral equations*, 19(11) (2006) 1201-1234.

[4] D. Fraňková, Regulated functions, *Mathematica Bohemica*. 116 (1) (1991), 20-59.

[5] R. Grau, A. C. Lafetá, J. G. Mesquita, Existence and uniqueness of local and maximal solutions for functional Volterra Stieltjes integral equations and applications, *submitted*.

[6] G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Steffans, Volterra Integral and Functional Equations, in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] R. Henstock, A Riemann-type integral of Lebesgue power. *Canad. J. Math.* 20, (1968) 79–87.

[8] Š. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Anal., vol. 5, 1992.

[9] A. Slavík, Dynamic equations on time scales and generalized ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 385 (2012), 534–550.

Nilpotent residual of a finite group with a supersolvable group of automorphisms

Eliana Rodrigues (Joint work with Emerson de Melo)
Department of Academic Areas, Instituto Federal de Goiás, Formosa-GO 73813-816, Brazil

Resumo

Let A be a supersolvable group and B a normal subgroup of A of prime order q. Suppose that there exists a set of generators $x_1, \ldots, x_t$ of A such that each subgroup $A_i = \langle B, x_i \rangle$ is either an elementary abelian q-group of rank 2 or a Frobenius group. Assume that A acts coprimely on a finite group G in such a manner that $C_N(B) = \langle C_N(A_1), \ldots, C_N(A_t) \rangle$ for any A-invariant subgroup N. We show that if $C_G(x)$ is nilpotent for any $x \in \{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$, then G is nilpotent. If $\gamma_\infty(C_G(x))$ has order at most m for any $x \in \{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$, then the order of $\gamma_\infty(G)$ is bounded solely in terms of m and $|A|$. Moreover, if $\gamma_\infty(C_G(x))$ has rank at most r for any $x \in \{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$, then the rank of $\gamma_\infty(G)$ is bounded solely in terms of r and $|A|$. As an application of our result we obtain some corollaries on Frobenius groups, dihedral groups and p-groups acting as groups of automorphisms.

Referências

[1] E. de Melo, Nilpotent residual and Fitting subgroup of fixed points in finite groups, *J. Group Theory* 22 (2019), 1059-1068.

[2] E. de Melo, A. S. Lima and P. Shumyatsky, Nilpotent residual of fixed points, *Arch. Math.*, 111 (2018), 13-21.

[3] P. Shumyatsky, The dihedral group as group of automorphisms, *J. Algebra* 375 (2013), 1-12.

Maximum likelihood estimator for the generalized Langevin equation

Felipe Quintino (Joint work with Chang Dorea and Ary Medino)
Universidade de Brasília, Brasília - Brasil

Resumo

The *Generalized Langevin Equation* (GLE) is a *stochastic differential equation* (SDE) in which the drift is a stochastic process which can depend on the whole process history. This SDE is given by

$$\begin{cases} dX(t) &= -\int_0^t X(s)\gamma_\theta(t-s)ds + dL(t), \quad t > 0 \\ X(0) &= X_0, \end{cases} \tag{5}$$

where $\mathbf{L} = \{L(t); t \geq 0\}$ is a Lévy process, X_0 is a random variable independent of $\mathbf{L}$ and $\gamma_\theta(\cdot)$ is the memory function depending on $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$.

The class of solutions $\{\mathbf{X}_\theta; \theta \in \Theta\}$ of (5) induces a family of probability measures $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ on the space $D[0,\infty)$ of càdlàg functions on the interval $[0,\infty)$. We denote $X_t = \{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ and the drift of the GLE (5) is denoted by $b(\theta, X_t) = -\int_0^t X(s)\gamma_\theta(t-s)ds$. Then, we show that the log-likelihood process (Radon-Nikodym derivative of P_θ with respect to P_0) is given by

$$l(\theta, X_t) := \log \frac{dP_\theta^t}{dP_0^t}(X_t) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^t b(\theta, X_s)dX^c(s) - \frac{1}{2\sigma^2}\int_0^t b^2(\theta, X_s)ds\cdot$$

Consider $\theta_0 \in \Theta$ being the true value of the parameter corresponding to the observed path of $\mathbf{X}$. Generally, the maximum likelihood estimator (MLE) of θ_0

$$\bar{\theta}(t) := \arg\max_{\theta\in\Theta} l(\theta, X_t)$$

has a non-explicit form and we present sufficient conditions for its consistency and asymptotic normality, that means

$$\bar{\theta}(t) \to \theta_0 \quad P_{\theta_0} - a.s. \text{ as } t \to \infty$$

and

$$\text{Law}\left(\varphi(t)^{1/2}\left(\bar{\theta}(t) - \theta_0\right)\Big| P_{\theta_0}\right) \to N(0, I^{-1}(\theta_0)) \text{ as } t \to \infty,$$

where N denotes the normal random vector with covariation matrix $I^{-1}(\theta_0)$.

We also prove that the MLE is efficient in the sense of Hájek-Le Cam convolution theorem. In particular, we showed that the statistical experiment associated with the MLE satisfies the locally asymptotic normal property. That is,

$$\text{Law}\left(\log \frac{dP^t_{\theta+h\varphi(t)^{-1/2}}}{dP^t_\theta}\Bigg| P_\theta\right) \to h^\top N\left(0, I(\theta)\right) - \frac{1}{2}h^\top I(\theta)h, \quad \text{as } t \to \infty,$$

for all $h \in \mathbb{R}^d$ and a rate of convergence such that $\varphi(t) \uparrow \infty$.

If we observe a discrete time path $X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$ of a process solution from (5), then a discrete version of the MLE $\bar{\theta}(t)$ (denote $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$) was proposed. Furthermore, estimations from simulated paths were done for the generalized Ornstein-Uhlenbeck process of the fluctuating exponential type proposed by [1].

Referências

[1] W. R. Alcântara (2019), Uma Nova Classe de Soluções da Equação de Langevin Generalizada e sua Aplicação na Modelagem do Cupom Cambial, *Ph.D. thesis*. Universidade de Brasília.

[2] A. Gloter, D. Loukianova, H. Mai (2018), Jump filtering and efficient drift estimation for Lévy-driven SDEs, *Ann. Statist.* 46, no. 4, pp.1445-1480.

[3] D. Kannan (1977), On the generalized Langevin equation, *J Math Phys Sci.* v. 11, no. 1, pp. 1-24.

[4] U. Küchler, M. Sϕrensen (1997), Exponential Families of Stochastic Processes, *Springer-Verlag New York.*

[5] L. Le Cam, G. Yang (2000), Asymptotics in Statistics. Some Basic Concepts, *Springer-Verlag New York.*

[6] H. Mai (2014), Efficient maximum likelihood estimation for Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes, *Bernoulli*, v.20, no.2, pp.919-957.

[7] A. Medino, S. Lopes, R. Morgado, C. Dorea (2012), Generalized Langevin equation driven by Lévy processes: A probabilistic, numerical and time series based approach, *Physica. A (Print).* v. 391, pp. 572-581.

[8] F. Santos (2011), Classes de soluções para a equação de Langevin generalizada, *Ph.D. thesis.* Universidade de Brasília, Brasília.

[9] J. Stein, S. Lopes, A. Medino (2016), Continuous processes derived from the solution of generalized Langevin equation: theoretical properties and estimation, *Journal of Statistical Computation and Simulation (Print).* v. 86. pp.2819-27.

Isomorfismos em Álgebras Primitivas à Direita com Ideais à Direita Graduados Minimais

John Freddy Moreno Lozada (`O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho`)
Departamento de Matemática
Universidade de Brasilia

Resumo

Sejam G um grupo abeliano, $\mathcal{S}$ um anel associativo comutativo unitário com G-graduação trivial e com característica diferente de 2, $\mathbb{U}(\mathcal{U})$ o conjunto de todos os elementos invertíveis de $\mathcal{S}$ e $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{U})$ um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$, para todo $\alpha \in G$. Em [1], Bahturin, Bresǎr e Kochetov, tabalhando sobre um corpo base algebricamente fechado de característica diferente de 2, com o propósito de classificar, a menos de isomorfismo, todas as graduações da álgebra de Lie finitária simples de transformações lineares (linear especial, ortogonal e simplética) em um espaço vetorial de dimensão infinita, caracterizaram os anéis graduados primitivos (álgebras graduadas primitivas) com um ideal à esquerda graduado minimal e usaram esse resultado para estudar os isomorfismos nestes anéis e álgebras. Por outro lado, em [3], Sousa introduziu o conceito de σ-adjunta associada a uma forma bilinear graduada não degenerada e obteve uma caracterização dos anéis graduados primitivos (álgebras graduadas primitivas) com um ideal à direita graduado minimal, semelhante ao obtido por Bahturin, Bresǎr e Kochetov em [1]. Neste trabalho, continuando com o desenvolvimento teórico de Souza em [3], caraterizamos isomorfismos em $\mathcal{S}$-álgebras graduadas primitivas com um ideal à direita graduado minimal. Este trabalho é em parceria com Irina Sviridova.

Referências

[1] Yu. A. Bahturin, M. Bresar, M. Kochetov, Group grandings on finitary simple Lie algebras, *Int. J. Algebra Comp*, **22**(2012), 125-146.

[2] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol 37, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1959.

[3] K. Souza, *Involuções Coloridas em Anéis Primitivos Graduados*, Universidade de Brasilia, 2016.

Grafos profinitos de grupos

Mattheus P. S. Aguiar (Bolsista da CAPES)
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Resumo

Esta tese está dividida em 3 partes. Na primeira estendemos a teoria de completamentos profinitos de grafos de grupos do caso de grafos finitos para o caso de grafos infinitos. Fazemos isso através da introdução de uma nova definição de grupos fundamentais profinitos de grafos de grupos, que utiliza a linguagem de caminhos, em substituição à definição usual apresentada no livro base da teoria [9], publicado em 2017. Mostramos que essas duas definições são equivalentes e que a primeira se comporta melhor na aplicação de limites inversos, ferramenta crucial no universo profinito. Além disso, se relaciona de forma mais próxima com a teoria abstrata de grafos de grupos desenvolvida em [10]. Em seguida, utilizando essa nova definição, mostramos que dado um grafo infinito de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$, é possível construir um grafo profinito de grupos $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\Gamma})$ tal que Γ está densamente imerso em $\overline{\Gamma}$, o grupo fundamental profinito $\Pi_1(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\Gamma})$ é o completamento profinito de $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ e a árvore padrão $S(\mathcal{G}, \Gamma)$ está densamente imersa na árvore padrão profinita $S(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\Gamma})$. Isso responde a uma conjectura de Luis Ribes [9, Questão em aberto 6.7.1]. Este trabalho foi desenvolvido em conjunto com o Prof. Dr. Pavel Zalesski e corresponde às seções 3 e 4 do artigo [1]. De fato, apresentamos no artigo um contexto mais geral, a saber para grupos fundamentais pro-$\mathcal{C}$ de grafos de grupos pro-$\mathcal{C}$, em que $\mathcal{C}$ é uma pseudovariedade de grupos finitos fechada para extensão. Ao longo de todo esse trabalho, quando nos referirmos a uma pseudovariedade, essa possuirá as características supracitadas.

A segunda parte está dedicada à aplicação desses métodos à solução de 3 problemas. O primeiro deles responde à pergunta [9, Questão em aberto 15.11.10] e generaliza o resultado principal de [8], ao mostrar que não precisamos da condição "finitamente gerado" sobre um grupo G para provar que o normalizador $N_G(H)$ de um subgrupo finitamente gerado H de G é denso em $N_{\hat{G}}(\overline{H})$. Esse problema é tratado de forma mais geral, para o caso pro-$\mathcal{C}$, na seção 5 de [1]. O segundo está relacionado com o seguinte cenário: um grupo G é dito separável por conjugação de subgrupo se para quaisquer dois subgrupos fechados finitamente gerados H_1 e H_2 de G (na topologia profinita de G), então H_1 e H_2 são conjugados em G se, e somente se, suas imagens em cada quociente finito G/N são conjugadas. Ou, de forma equivalente para grupos residualmente finitos, se seus fechos em $\widehat{G}$ são conjugados. Nós mostramos que todo grupo virtualmente livre é separável por conjugação de subgrupo. Isso responde afirmativamente à questão 15.11.11 de [9] e generaliza o resultado principal de [4], em que essa propriedade foi demonstrada para grupos G finitamente gerados. Esse problema também é tratado de forma mais geral, para o caso pro-$\mathcal{C}$, na seção 6 de [1]. O terceiro responde afirmativamente a uma conjectura formulada por Long-Reid no célebre artigo [7] e posteriormente corrigida por Minasyan em [6]. Um subgrupo H de um grupo K é dito um retrato se existe um homomorfismo $\rho : K \to H$ cuja restrição a H é a aplicação identidade. Um retrato virtual de G é um subgrupo H contido em um subgrupo de índice finito K com H sendo um retrato de K. Se todos os subgrupos finitamente gerados de um dado grupo G são retratos virtuais, dizemos que G possui a propriedade (LR). Essa terminologia foi introduzida por Long e Reid em [7], mas foi investigada implicitamente bem antes. Grupos livres satisfazem (LR) pelo Teorema de Marshall-Hall. No artigo original, Long and Reid conjecturaram que todo grupo finitamente gerado virtualmente livre G possuia propriedade (LR). Embora eles argumentem que apresentaram a demonstração de um resultado mais geral, Minasyan mostrou em [6, Observação 5.4] que a prova era inválida, deixando a questão em aberto. Então Minasyan corrigiu a conjectura, que aparece como Questão em aberto 11.1 em [6]: grupos virtualmente livres satisfazem (LR)? Em um trabalho conjunto com o Prof.

Dr. Igor Lima [2], nós respondemos essa questão de forma afirmativa e em um contexto mais geral, para grupos livres-por-$\mathcal{C}$, em que $\mathcal{C}$ é uma pseudovariedade de grupos finitos fechada para extensão.

Por fim, a terceira parte é dedicada à acessibilidade em grupos pro-p finitamente gerados. O conceito de acessibilidade em grupos pro-p foi introduzido por Wilkes em [11] (2019) e generalizado por Chatzidakis e Zalesskii em [5] (2021). Dessa forma ainda é um campo de estudo recente, mas bastante promissor. Dizemos que um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é reduzido se para toda aresta $\{e\}$, que não é um laço, nem $\partial_1 : \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_1(e))$ ou $\partial_0 : \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_0(e))$ são isomorfismos. E um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é dito injetivo se as aplicações $\mathcal{G}(m) \to \Pi(\mathcal{G}, \Gamma, v)$ são monomorfismos para todo $m \in \Gamma$. Seguindo [10, Seção 6.1] dizemos que um grupo pro-p é um grupo FA se ele não pode agir em um grupo pro-p sem um ponto fixo global. Um grupo H é totalmente acessível com respeito a uma família de p-grupos finitos $\mathcal{F}$ se quaisquer cisões de H como o grupo fundamental de um grafo finito de grupos reduzido $(\mathcal{G}, \Gamma)$, tais que os vértices de grupo são grupos FA e os grupos de aresta são $\mathcal{F}$-grupos, são $\mathcal{F}$-grupos. Provamos inicialmente um resultado extremamente técnico e que apresenta diversas complicações estruturais, o que explica a extensão incomum da demonstração de 15 páginas. O enunciado é o seguinte: Seja $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ o grupo fundamental pro-p de um grafo finito de grupos pro-p $(\mathcal{G}, \Gamma)$ que é injetivo e reduzido. Seja H um subgrupo aberto de G e $H = \Pi_1(\mathcal{H}, \Delta)$ sua decomposição como grupo fundamental pro-p de um grafo finito de p-grupos finitos que é injetivo e reduzido. Então $|E(\Delta)| \geq |E(\Gamma)|$. Para finalizar, aplicamos esse teorema técnico para mostrar que dado um grupo G pro-p finitamente gerado que contém um subgrupo normal aberto H, que é totalmente acessível e cinde não trivialmente como um produto amalgamado ou uma extensão HNN, então G é isomorfo ao grupo fundamental pro-p de um grafo finito de grupos pro-p. Esse trabalho é o conteúdo do artigo [3] em conjunto com o Prof. Dr. Pavel Zalesski.

O autor, bolsista PICME, agradece o apoio financeiro da CAPES durante o doutorado.

Referências

[1] M. P. S. Aguiar and P.A. Zalesskii, The profinite completion of the fundamental group of infinite graphs of groups (2020) *arXiv:2010.12720v1 [math.GR]* (submetido para publicação).

[2] M. P. S. Aguiar and I. S. Lima, Virtual retractions on virtually free groups (em preparação).

[3] M. P. S. Aguiar and P.A. Zalesskii, Finitely generated pro-p accessible groups (em preparação).

[4] S. C. Chagas and P. A. Zalesskii, Subgroup conjugacy separability of free-by-finite groups. *Arch. Math.* **104**, (2015), 101-109.

[5] Z. Chatzidakis and P. Zalesskii, Pro-p groups acting on trees with finitely many maximal vertex stabilizers up to conjugation. *Isr. J. Math.* (2021).

[6] A. Minasyan, Virtual retraction properties in groups, *Int. Math. Res. Not. rnz249* (2019).

[7] D. D. Long and A. W. Reid, Subgroup separability and virtual retractions of groups. *Topology* **47**, (2008), 137-159.

[8] L. Ribes and P. A. Zalesskii, Normalizers in groups and in their profinite completions. *Rev. Mat. Iberoam.* **30**, (2014), 165-190.

[9] L. Ribes, Profinite graphs and groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. **3**. Folge, *A Series of Modern Surveys in Mathematics 66*, Springer, Berlin, 2017.

[10] J.-P. Serre, Trees. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[11] G. Wilkes, On acessibility for pro-p groups. *J. Algebra.* 525, 1-18, (2019).

Hook and Strip Theorems for PI-Superalgebras with Superinvolution

Renata Alves da Silva (PhD student of the last semester at UnB under the supervision of Irina Sviridova)
University of Brasilia

Resumo

Let $A = A_0 \oplus A_1$ be a superalgebra over a field F of characteristic zero. A superinvolution in A is a graded linear application $\# : A \to A$ such that $(c^{\#})^{\#} = c$ for all $c \in A$ and $(ab)^{\#} = (-1)^{deg(a)deg(b)} b^{\#} a^{\#}$ for all homogeneous elements $a, b \in A_0 \cup A_1$, where $deg(d)$ is the homogeneous degree of $d \in A_0 \cup A_1$. In this case, we say that A is a $\#$-superalgebra.

The study of superalgebras with some superinvolution and their identities is of the great interest for several areas of Mathematics.

One of the important results of the theory of polynomial identities is the celebrated Hook Theorem, which was proven by Amitsur and Regev in [1]. There exist also versions of this theorem for the case of $\mathbb{Z}_2$-graded identities and identities with involution that were proved by Regev and Giambruno in [2].

In 1979, Regev showed in [3] that, if A is an algebra that satisfies the Capelli identity of rank k, then the sequence of cocharacters of A has bounded height by $k-1$. In the PI-theory, this result is known as The Strip Theorem.

These results are related with the using of theory of group representations for the understanding of a behaviour of identities and, moreover, they have various applications in PI-theory and in other areas of Mathematics.

The main goal of this talk is to present a version of the Hook and Strip Theorems for the case of superidentities with superinvolution .

For a superalgebra with superinvolution over a field F of characteristic zero, the ideal of superidentities with superinvolution is completely defined by multilinear identities that have a structure of $S_{\langle n\rangle}$-modulo, where $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, and each n_i corresponds to the quantity of homogeneous $\#$-symmetric or $\#$-antisymmetric variables. The behavior of these $\#$-superidentities may be described by the corresponding cocharacter

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle},$$

where $\langle\lambda\rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ is a multipartition of $\langle n\rangle$ and $\lambda_i \vdash n_i$ is a partition of n_i.

Theorem A: *(Hook Theorem for $\#$-superalgebras)* Let A be a $\#$-superalgebra. If A is a PI-algebra (i.e., A also satisfies some non-trivial ordinary identity), then there exist integers $d_i, l_i \geq 0$, with $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, such that the n-th cocharacter, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, is contained in a quadruple hook

$$H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4)),$$

that is,

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash n \\ \langle\lambda\rangle \in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle},$$

where $\langle\lambda\rangle \in H_4(n)$ means $\lambda_i \in H(d_i, l_i)$, for all $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, that is, $\lambda_{d_{i+1}} \leq l_i$.

Theorem B: *(The Strip Theorem for $\#$-superalgebras)* Let A be a $\#$-superalgebra and consider $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle}$ its n-th cocharacter. If A is a PI-algebra, then A satisfies $Cap_{\langle k\rangle}$,

$k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, the Capelli #-identity of rank $\langle k \rangle$, if, and only if, $m_{\langle \lambda \rangle} = 0$ whenever $h(\langle \lambda \rangle) \geq \langle k \rangle$

This is a joint work with I. Sviridova.

Referências

[1] S. A. Amitsur and A. Regev, *P.I. algebras and their cocharacters*, *J.Algebra*, (78) (1982), 248–254 .

[2] A. Giambruno and A. Regev, *Wreath Products and PI-algebras Journal Pure and Applied Algebra*, (35) (1985), 133–149 .

[3] A. Regev, *Algebras satisfying a Capelli identity*, *Israel J. Math*, (33) (1979), 149–154.

On Finite Groups Admitting Coprimes Automorphisms

Sara Raissa Silva Rodrigues (`PhD student of the last semester at UnB under the supervision of Prof. Dr. Pavel Shumyatsky`)
University of Brasilia

Resumo

Let G be a finite group admitting an automorphism ϕ. Denote by G_ϕ the centralizer of ϕ in G and by $G_{-\phi}$ the set $\{x^{-1}x^\phi \mid x \in G\}$. The subgroup generated by $G_{-\phi}$ will be denoted by $[G, \phi]$. There are many results relating the structure of the group G and the properties of G_ϕ and $G_{-\phi}$.

In this work, we present results bounding the exponent of G and $[G, \phi]$. They are concentrated in finite groups that admit a coprime automorphism, with special attention to odd order groups that admit an involutory automorphism.

More specifically, if G is a finite group of odd order admitting an involutory automorphism ϕ, the following results were obtained: suppose that G_ϕ is nilpotent of class c. If $x^e = 1$ for each $x \in G_{-\phi}$ and the subgroup $\langle x, y\rangle$ has derived length at most d for every $x, y \in G_{-\phi}$, then the exponent of $[G, \phi]$ is bounded in terms of c, d and e. On the other hand, if G_ϕ has rank r and $x^e = 1$ for each $x \in G_{-\phi}$, then the exponent of $[G, \phi]$ is bounded in terms of e and r.

Furthermore, assume that G is a finite group admitting a coprime automorphism ϕ of order n. We prove that, if every element from $G_\phi \cup G_{-\phi}$ is contained in a ϕ-invariant subgroup of exponent dividing e, then the exponent of G is bounded in terms of e and n. To demonstrate this result, Lie-theoretic tools created by Zelmanov (see [4]) were used. In addition, we extend the first result as follows: suppose that G_ϕ is nilpotent of class c. If $x^e = 1$ for each $x \in G_{-\phi}$ and any two elements of $G_{-\phi}$ are contained in a ϕ-invariant soluble subgroup of derived length d, then the exponent of $[G, \phi]$ is bounded in terms of c, d, e and n.

Finally, we also extend the second result to the case in which the order of the automorphism may be an arbitrary prime. We prove that, if G is a finite group admitting a coprime automorphism ϕ of prime order p such that G_ϕ has rank r and $x^e = 1$ for each $x \in G_{-\phi}$, then the exponent of $[G, \phi]$ is bounded in terms of e, p and r.

This is a joint work with Pavel Shumyatsky. It is important to point out that the results mentioned above in this talk are published in [1], [2] and [3].

Referências

[1] S. R. S. Rodrigues, P. Shumyatsky, Exponent of a finite group of odd order with an involutory automorphism, Archiv der Mathematik, **113** (2019), 113-118.

[2] S. R. S. Rodrigues, P. Shumyatsky, Exponent of a finite group admitting a coprime automorphism, J. Pure Appl. Algebra, **224** (2020), 106370.

[3] S. R. S. Rodrigues, P. Shumyatsky, Exponent of a finite group admitting a coprime automorphism of prime order, J. Group Theory, (2020), DOI 10.1515/jgth-2020-0141.

[4] P. Shumyatsky, Applications of Lie ring methods to group theory, Nonassociative Algebra and Its Applications, (Eds R. Costa et al.), Marcel Dekker, New York, (2000), 373-395.

Intransitive abelian self-similar groups

Tulio Santos (`Joint work with Said Sidki and Alex Dantas`)
University of Brasilia

Resumo

A self-similar group is a group G acting on a one-rooted m-regular tree $\mathcal{T}_m$ in such a way that the states of its elements are themselves elements of G. Famous examples of self-similar groups include the infinite torsion 2-group of Grigorchuk [8] and the Gupta-Sidki p-groups [7].

The notion of virtual endomorphism was introduced by Nekrashevych and Sidki [9] and has been a successful tool for constructions of self-similar groups which act transitively on the first level of the tree. This approach was explored, for example, in [6], [4], [3], [5]. Recently we gave a procedure for constructing self-similar groups without assuming transitivity on the action of first level [1]. Following this approach we obtain in [1] a number of examples of intransitive self-similar groups such as $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, which is not transitive self-similar on $\mathcal{T}_m$ for any m [2].

Nekrashevych and Sidki characterized all self-similar free abelian subgroups of finite rank of the group of automorphisms of $\mathcal{T}_2$ [9]. Later Brunner and Sidki [3] conducted the most complete study of transitive abelian self-similar groups showing for example that the closure of such groups under the full diagonal operations of the group of automorphisms of $\mathcal{T}_m$ is again abelian. This lead to an important translation of transitive self-similar abelian groups to modules of the m-adic algebra $\mathbb{Z}_m[[x]]$. The generalization to the intransitive case requires a careful study of a monoid Δ of partial diagonal operations acting on the group of automorphisms of $\mathcal{T}_m$. We show that in this setting, that the closure of a self-similar abelian group A under Δ continues to be abelian. We also studied the centralizer structure of an intransitive abelian self-similar group and its closure by Δ.

Referências

[1] A. C. Dantas, T M. G. Santos and S. N. Sidki, *Intransitive self-similar groups*, Journal of Algebra, **567**, 2021, 564–581.

[2] A. C. Dantas and S. N. Sidki, *On self-similarity of wreath products of abelian groups*, Groups, Geometry and Dynamics, **12** (2018), 1061–1068.

[3] A. M. Brunner and S. N. Sidki, *Abelian state-closed subgroups of automorphisms of m-ary trees*, Groups, Geometry, and Dynamics, **4** (2010), 455–471.

[4] A. Berlatto and S. N. Sidki, *Virtual endomorphisms of nilpotent groups*, Groups, Geometry, and Dynamics, **1** (2007), 21–46.

[5] D. Kochloukova and S. N. Sidki, *Self-similar groups of type FP_n*, Geometriae Dedicata, **204** (2020), 241–264.

[6] L. Bartholdi and S. N. Sidki, *Self-similar products of groups,* Groups, Geometry, and Dynamics, **14** (2020), 107–115.

[7] N. Gupta and S. Sidki, *On the Burnside problem for periodic groups*,Math Z., **182** (1983), 385–388.

[8] R. I. Grigorchuk, *On the Burnside problem for periodic groups*, Functional Anal. Appl., **14** (1980), 41–43.

[9] V. Nekrashevych and S. N. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms*, Groups: topological, combinatorial and aritmetic aspects, London Mathematical Society Lecture Note Series, **311**. Cambridge University Press, (2004), 375–404.