Programa de Pós Graduação em Informática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

Analisando Terminação: Size Change Principle X Dependency Pairs

Ariane Alves Almeida
Orientador: Mauricio Ayala-Rincón

Seminário Informal (, mas formal!)
29 de Janeiro, 2015

Introdução/Motivação

Terminação.

- Importante para verificação de correção;
- Problema indecidível;
- Técnicas para verificar terminação em casos específicos:
  - KBO, RPO, ...;
  - Princípio de Mudança de Tamanho;
  - Pares Dependentes;
- Automação de verificação.

Size Change Principle (SCP) - Definições

- Compara-se lado esquerdo e lado direito de cada regra.
- Analisa-se como o tamanho dos parâmetros da função muda entre cada chamada.

Símbolos definidos $\mathcal{D}$

Dada uma assinatura $\mathcal{F}$, são as raízes de lados esquerdos das regras pertencentes a $\mathcal{F}$.

Construtores $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} = \mathcal{F} - \mathcal{D}$

$$Ack(0, y) \to S(y)$$
$$Ack(S(x), 0) \to Ack(x, S(0))$$
$$Ack(S(x), S(y)) \to Ack(x, Ack(S(x), y))$$

Par de Redução $(\succsim, \succ)$

$\succsim$ é uma quasi-ordem e $\succ$ é uma ordem bem fundada.

SCP - Construindo Grafos

Grafo de Mudanca de Tamanho - Size Change Graph (SCG)

- Definido para toda regra $f(s_1, ..., s_n) \rightarrow r$ e subtermo $g(t_1, ..., t_m)$ de r tal que $g \in \mathcal{D}$.
- Dado o Par de Redução $(\succsim, \succ)$, a construção do grafo é dada por:
  1. Nós de entrada V: $s_1, ..., s_n$ (Argumentos de f)
  2. Nós de saída W: $t_1, ..., t_m$ (Argumentos de g)
  3. Arestas E definidas para todo $\forall s_i, t_j$ como:
     1. Se $s_i \succ t_j$, temos uma aresta rotulada com $\succ$ de s_i para t_j;
     2. Se $s_i \succsim t_j$, temos uma aresta rotulada com $\succsim$ de s_i para t_j;

Exemplo: Construindo SCG para Ackermann

$$
\begin{gathered}
1)\ Ack(0, y) \to S(y) \\
2)\ Ack(S(x), 0) \to Ack(x, S(0)) \\
3)\ Ack(S(x), S(y)) \to Ack(x, Ack(S(x), y))
\end{gathered}
$$

G_1 :

$\nexists$

G_2 :

$$
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succ"] \arrow[dr, "\succeq"] & x \\
0 & S(0)
\end{tikzcd}
$$

$G_{3.1}$:

$$
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succ"] & x \\
S(y) & Ack(S(x), y)
\end{tikzcd}
$$

$G_{3.2}$:

$$
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succsim"] & S(x) \\
S(y) \arrow[r, "\succ"] & y
\end{tikzcd}
$$

SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)

$$
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succ"] \arrow[dr, "\succsim"] & x \\
0 & S(0)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succ"] & x \\
S(y) & Ack(S(x),y)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "\succsim"] & S(x) \\
S(y) \arrow[r, "\succ"] & y
\end{tikzcd}
$$

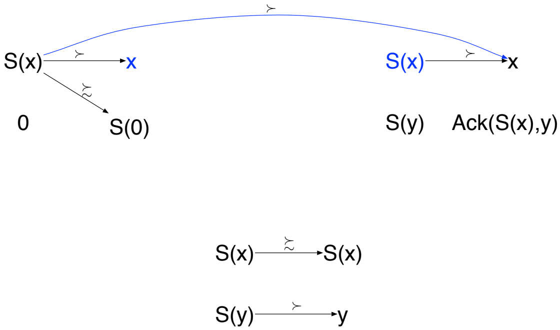
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



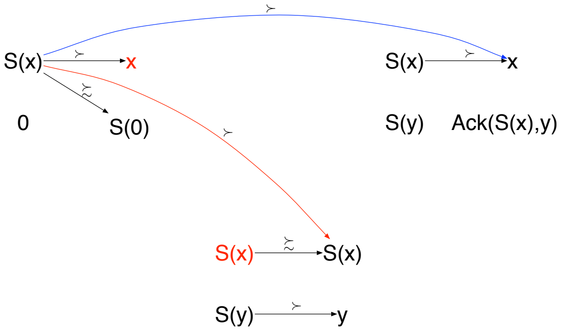
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



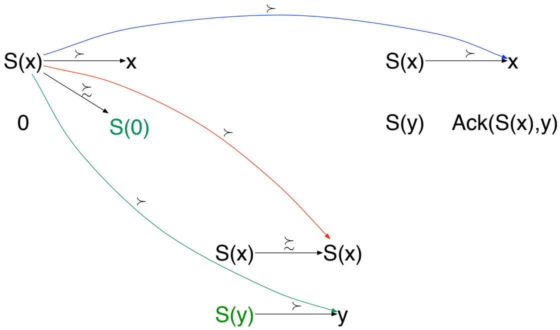
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



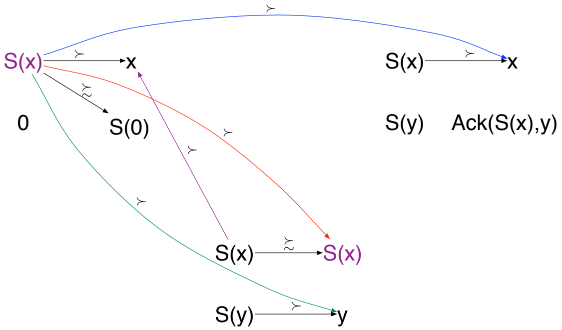
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



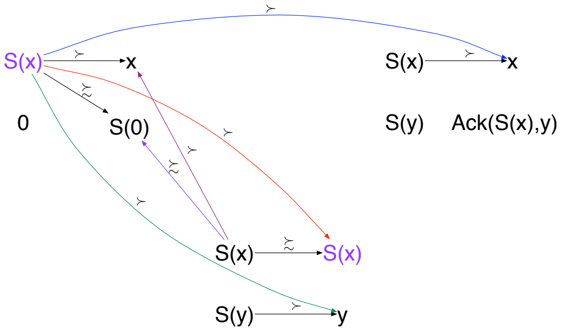
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall (v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w_j' \in V(H) | \exists mgu(w_j, w_j'))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w_j' para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



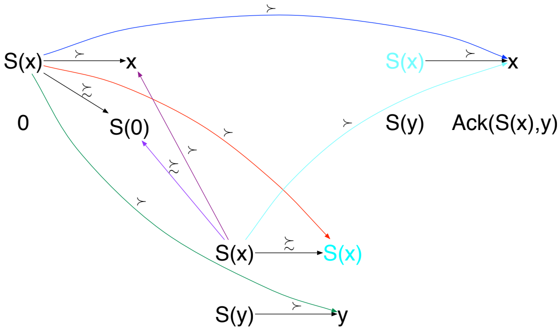
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



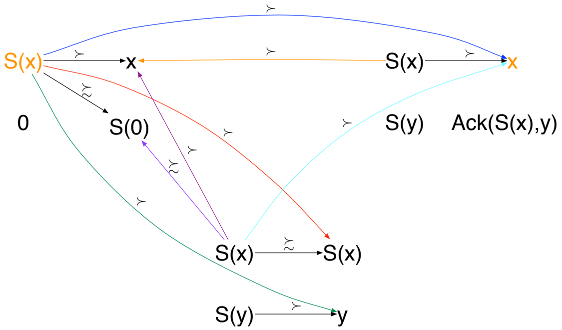
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w_j' \in V(H) | \exists mgu(w_j, w_j')) \text{ e } u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w_j' para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



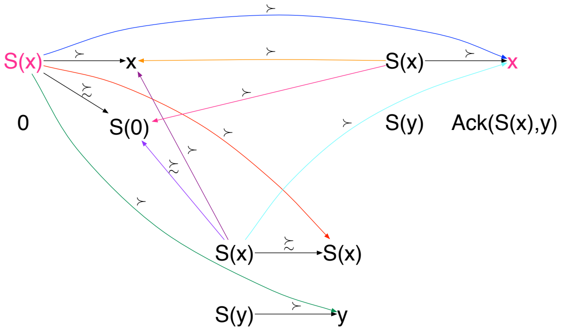
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall (v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



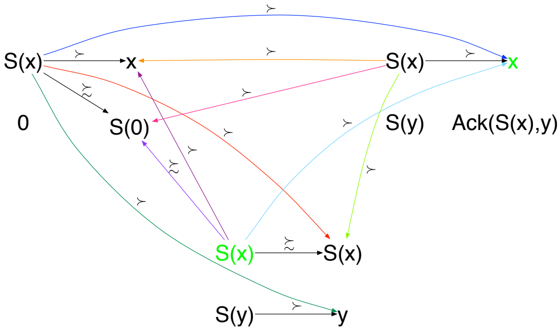
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)



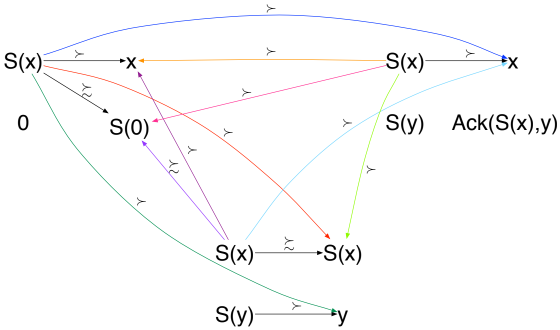
SCP - Construindo Multigrafos

Multigrafo $G \bullet H$

$\forall(v_i \in V(G), \quad w_j \in W(G), \quad (w'_j \in V(H) | \exists mgu(w_j, w'_j))$ e $u_k \in W(H))$:
Existe aresta de v_i para u_k se existe aresta de v_i para w_j e de w'_j para u_k:

- Rotulada com $\succ$ se para por alguma aresta $\succ$;
- Rotulada com $\succsim$ se para por alguma aresta $\succsim$.

Exemplo - Ackermann (Multigrafo)

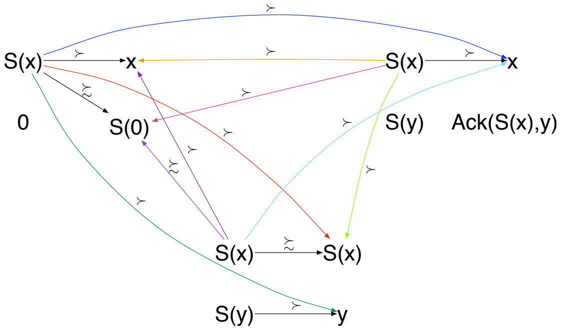


Multigrafo Maximal

- Nós de entrada e saída pertencem à mesma função;
- $G = G \bullet G$.

Size Change Termination(SCT)

Um TRS $\mathcal{R}$ sobre uma assinatura $\mathcal{F}$ é terminante na mudança de tamanho (SCT) com relacao ao par $(\succsim, \succ)$ se todo multigrafo maximal contém uma aresta da forma $i \rightarrow^{\succ} i$



SCT X Terminante

- Ser SCT não implica ser terminate.

Exemplo

$$f(a) \to f(b) \qquad b \to a$$

- Conside a precedência $a > b$. Temos como SCG, e também como multigrafo maximal:

$$a \xrightarrow{\succ} b$$

- O TRS é SCT, porém não terminante.

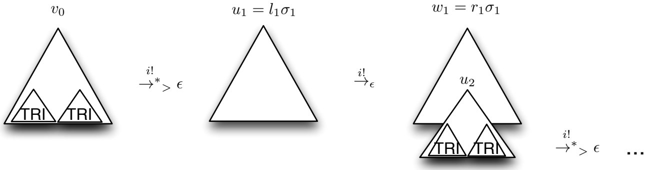
Condições para garantir terminação por SCT

Lema 1. SCT e Terminação por Redução mais Interna (TRI)

Seja $\succ$ uma ordem bem fundada em formas normais de um TRS $\mathcal{R}$.
Para $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, sejam $s_\sigma \xrightarrow{i!} s'$ e $t_\sigma \xrightarrow{i!} t'$ onde σ instancia todas as variáveis de s e t com formas normais de $\mathcal{R}$. Sejam $NF(s,t) = \{(s', t') | s_\sigma \xrightarrow{i!} s' \text{ e } t_\sigma \xrightarrow{i!} t'\}$ e $(\succsim, \succ)$ um par de redução onde $\forall(s', t') : s \succ t \Rightarrow s' > t'$. Então:

$$\textbf{SCT}(\mathcal{R}, (\succsim, \succ)) \Rightarrow \textbf{TRI}(\mathcal{R}, (\succsim, \succ)).$$

Suponha $\mathcal{R}$ não é TRI. Logo, $\exists v_0$ mínimo que não é TRI:



Contrariando $\succ$ ser bem fundada.

Condições para garantir terminação por SCT

Lema 2. Prova de Terminação por Redução mais interna.

Seja $(\succsim, \succ)$ um par de redução em $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$. Se $\mathcal{R}$ é SCT em relação à extensão $(\succsim', \succ')$ de $(\succsim, \succ)$ para $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, então $\mathcal{R}$ é TRI.

Por definição:

$$s \succ' t \text{ SSE } s = u\sigma, t = v\sigma \text{ e } u \succ v.$$

Como $u, v \in \mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$, com $\sigma = I$ temos $u \succ' v$.
Temos também que $(s', t') \in NF(s, t)$, ou seja, $s' \succ' t'$, e SCT($\mathcal{R}$, $(\succsim, \succ)$).
Logo, pelo Lema 1, TRI($\mathcal{R}$, $(\succsim, \succ)$).

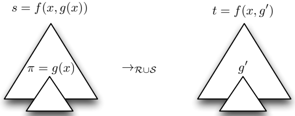
Provando Terminação

Lema 3. Redução de termos terminantes geram termos terminantes

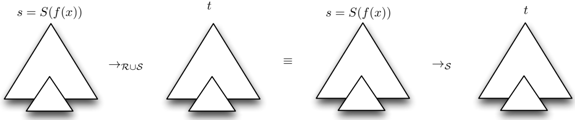
Sejam $\mathcal{R}$ um TRS sobre assinatura $\mathcal{F}$ com construtores $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ um TRS não-duplicante sobre $\mathcal{C}$ e $M_s = \{s_\pi | root(s|_\pi) \in \mathcal{D}$ e $\forall(\pi' < \pi) : root(s|_{\pi'}) \in \mathcal{C}\}$
Seja também $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ tal que todo termo em M_s é terminante em relação a $R \cup S$ e $s \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} t$.
Então todo termo em M_t também é terminante.

Seja π a posição da redução $s \rightarrow t$.

- Se s tem $f \in \mathcal{D}$ em π ou posição acima:



- Senão a redução é feita em um construtor:



Provando Terminação

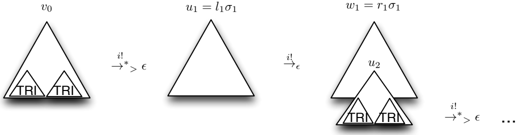
Corolário 1. Aplicar construtores a termos terminantes gera termos terminantes

Sejam $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ terminantes em relação a $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $c \in \mathcal{C}$.
Então $c(t_1, ..., t_n)$ também é terminante em relação a $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Teorema 1: SCT X Terminação

Seja $\mathcal{R}$ um TRS sobre uma assinatura $\mathcal{S}$ com construtores $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{S}$ um TRS terminante e não-duplicante de $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$
$SCT(\mathcal{R}, (\rightarrow^*_{\mathcal{S}}, \rightarrow^+_{\mathcal{S}})) \Rightarrow$ Terminante$(\mathcal{R})$

Suponha $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \mathcal{R}'$ não terminante:

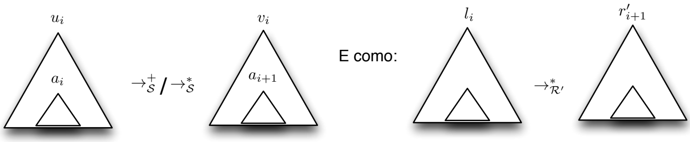


Onde cada redução (passo) corresponde a um SCG de $\mathcal{R}'$.

Provando Terminação

Cont.

Por não ser terminante, pelo Corolário 1. a raiz não pode ser um construtor. Ou seja, as raizes estão em $\mathcal{D}$ e os SCG são referentes a $\mathcal{R}$.
Como $\rightarrow_{\mathcal{S}}$ é fechado para substituição, podemos ter:



E dado que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}'$, seria possível fazer reduções em posições diferentes de v_0, o que contraria sua minimalidade.

Dependency Pairs (DP) - Definições

- Analisa-se terminação de loops.

Pares Dependentes

Seja $\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ um TRS. Seja também $f(s_1, ..., s_n) \rightarrow r$ uma regra de reescrita de $\mathcal{R}$. Se $g(t_1, ..., t_m)$ é subtermo de r e $g \in \mathcal{D}$, então temos como par dependente:

$$\langle f^{\#}(s_1, ..., s_m), g^{\#}(t_1, ..., t_n) \rangle$$

Exemplo - Ackermann

$$1)\ Ack(0, y) \rightarrow S(y)$$
$$2)\ Ack(S(x), 0) \rightarrow Ack(x, S(0))$$
$$3)\ Ack(S(x), S(y)) \rightarrow Ack(x, Ack(S(x), y))$$

- (2) $\langle A(S(x), 0), A(x, S(0)) \rangle$
- (3.1) $\langle A(S(x), S(y)), A(x, Ack(S(x), y)) \rangle$
- (3.2) $\langle A(S(x), S(y)), A(S(x), y) \rangle$

Dependency Pairs (DP) - Definições

Cadeia de Dependência

Assumindo que diferentes ocorrências de pares dependentes tenham variáveis disjuntas, uma cadeia de dependência é uma sequência de pares dependentes

$$\langle s_1, t_1 \rangle, \langle s_2, t_2 \rangle, \langle s_3, t_3 \rangle \cdots$$

se existe substituição σ tal que $t_j\sigma \to^*_{\mathcal{R}} s_{j+1}\sigma$

Exemplo - DP's 2 e 3.1 de Ackermann

Primeiro renomeamos as variáveis dos dois pares, tendo:

$$\langle A(S(x_1), 0), A(x_1, S(0)) \rangle \qquad \langle A(S(x_2), S(y_2)), A(x_2, Ack(S(x_2), y_2)) \rangle$$

Seja $\sigma = \{S(0)/x_1, 0/x_2, 0/y_2\}$, temos:

$$(A(x_1, S(0)))\sigma \to^*_{\mathcal{R}} (A(S(x_2), S(y_2)))\sigma$$

Exemplo - DP 3.1 de Ackermann com ele mesmo

Primeiro renomeamos as variáveis das duas ocorrências deste par, tendo:

$$\langle A(S(x_1), S(y_1)), A(x_1, Ack(S(x_1), y_1)) \rangle \qquad \langle A(S(x_2), S(y_2)), A(x_2, Ack(S(x_2), y_2)) \rangle$$

Seja $\sigma = \{S(0)/x_1, 0/y_1, 0/x_2, Ack(S(0), 0)/y_2\}$, temos:

$$(A(x_1, Ack(S(x_1), y_1)))\sigma \to^*_{\mathcal{R}} (A(S(x_2), S(y_2)))\sigma$$

Terminação e Cadeias de Dependência

Terminação X Cadeias de Dependência

Um TRS $\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ é terminante SSE não há cadeia de dependência infinita.

Lema 4. Provando a terminação

Um TRS $\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ é terminante SSE existe uma quasi-ordem fracamente monotônica bem fundada $\geq$ com $\geq$ e $>$ fechadas para substituição, tal que:

- $l \geq r$ para toda regra $l \to r$ em R, e
- $s > t$ para todo par dependente $\langle s, t \rangle$.

Se

A existência dessa quasi-ordem nos dá $l \geq r$ para todas as regras do sistema.
Temos que

$$t \to_{\mathcal{R}}^{*} s \Rightarrow t \geq s$$

Supondo que exista cadeia infinita de pares dependentes, existe substituição σ tal que:

$$s_1\sigma > t_1\sigma \geq s_2\sigma > t_2\sigma \geq s_3\sigma > t_3\sigma > ...$$

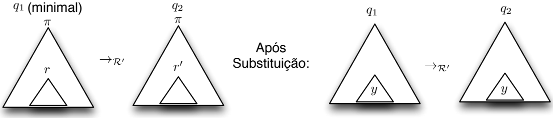
O que contradiz $>$ ser bem fundada.

Provando Terminação

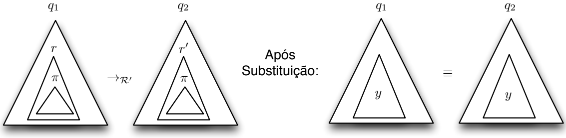
Somente Se)

Seja $\mathcal{S} = \{s \to t | \langle s, t \rangle \text{é DP}\}$ e $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$
Supondo $\mathcal{R}'$ não terminante, substituimos todo redex $r \in \mathcal{S}$ por uma única variável fresca y e analisamos onde ocorreu a redução: $q_1 \to_{\mathcal{R}'} q_2 \to_{\mathcal{R}'} q_3 \to_{\mathcal{R}'} \cdots$

- Em posição π acima de todo redex $r \in \mathcal{S}$:



- Em posição π abaixo de algum redex $r \in \mathcal{S}$ ou em posição raiz:



Nos dando redução do tipo $t_{1,i} \to^*_{\mathcal{R}'} t_{k,j}$ para todo subtermo $t_i \in \mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{V})$ e número de passos k que deixa um redex s acima dos demais ou na raiz.
Isso contraria a minimalidade de q. Como q tem forma $F(\vec{u_1})$, temos uma cadeia infinita.

Análise de laços

- As provas de terminação são então reduzidas a encontrar a quasi-ordem que satisfaz os requisitos necessários.
- Necessário analisar a possível ocorrêcia infinita de pares em uma cadeia.
- Podemos conectar estes pares para verificar laços.

Grafo de Dependência - DG

O grafo de dependência de um TRS $\mathcal{R}$ é um grafo dirigido cujos nós são os pares dependentes e existe uma aresta de $\langle s, t\rangle$ para $\langle v, w\rangle$ se $\langle s, t\rangle\langle v, w\rangle$ é uma cadeia de dependência.

Teorema 2. Terminação segundo DG

Um TRS $\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ é terminante se existe uma quasi-ordem fracamente monotônica bem fundada $\geq$ com $\geq$ e $>$ fechadas para substituição, tal que:

- $l \geq r$ para toda regra $l \rightarrow r$ em R,
- $s \geq t$ para todo par dependente $\langle s, t \rangle$ em um ciclo do DG e
- $s > t$ em pelo menos um par dependente $\langle s, t \rangle$ em cada ciclo do DG

- No grafo de dependência, infinitos DP correspondem a cadeias de redução infinitas gera um caminho infinito que tem pelo menos um ciclo infinito.
- Pelo menos um par desse ciclo tem um inequação restrita, logo, a cadeia corresponde a uma sequência decrescente de termos com infinitas inequações estritas.
- Prova análoga à do Lema 4.

Problema

Saber se pares dependentes formam uma cadeia é indecidível, pois assim é o problema de encontrar uma substituição σ apropriada.

Grafo estimado - Construção

1. $CAP(t)$ é o termo t onde todos seus subtermos formados por símbolos definidos são substituídos por variáveis frescas diferentes.
2. $REN(t)$ é o termo t onde todas suas ocorrências de variáveis são substituídas por diferentes variáveis frescas.

   Ex: $REN(CAP(A(x, Ack(S(x), y)))) = REN(A(x, x_1)) = A(x_2, x_3)$
3. Se $REN(CAP(t))$ é unificável com v, ou seja, se t e v são conectáveis, então cria-se uma aresta do par dependente $\langle s, t\rangle$ para o par $\langle v, w\rangle$.
4. Caso estejamos fazendo o grafo de dependência interna, haverá tal aresta apenas se $CAP(t)$ for unificável com v.

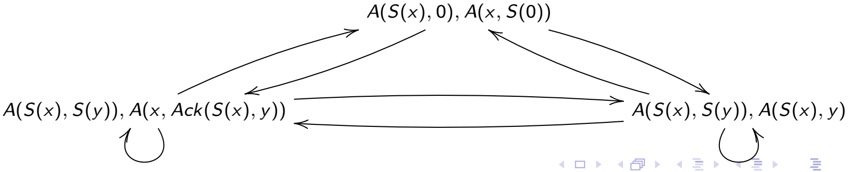
Possibilita automação de provas terminação pela definição anterior.

Grafo estimado para Ackermann

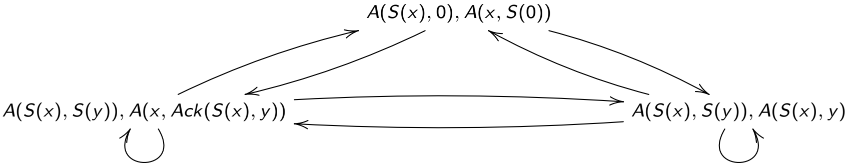
Sendo:
1) $\langle A(S(x),0), A(x,S(0))\rangle$
2) $\langle A(S(x),S(y)), A(x,Ack(S(x),y))\rangle$
3) $\langle A(S(x),S(y)), A(S(x),y)\rangle$
Verifica-se a existência de arestas:

- 1,1: $t = A(x,S(0)), v = A(S(x),0)$
  $REN(CAP(A(x,S(0))) = A(x_1,S(0))$
- 1,2: $t = A(x,S(0)), v = A(S(x),S(y))$
  $REN(CAP(A(x,S(0))) = A(x_1,S(0))$
  $mgu(A(x_1,S(0)), A(S(x),S(y))) = \{S(x)/x_1, 0/y\}$
- ...

Logo, o Grafo de Dependência estimado para o TRS Ackermann é:

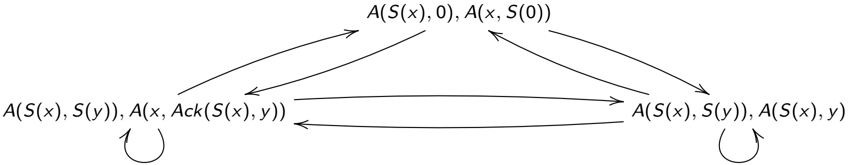


Verificando Terminação pelo Grafo de Dependência de Ackermann



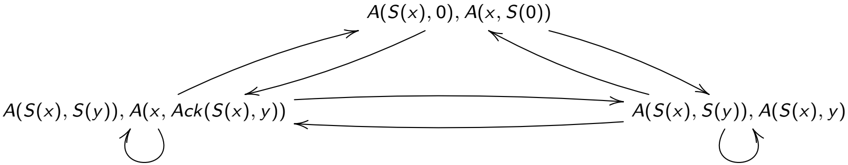
- $l \geq r$ para toda regra $l \to r$ em R:✓
  (1) $Ack(0, y) \to S(y)$
  (2) $Ack(S(x), 0) \to Ack(x, S(0))$
  (3) $Ack(S(x), S(y)) \to Ack(x, Ack(S(x), y))$
- $s \geq t$ para todo par dependente $\langle s, t \rangle$ em um ciclo do DG:✓
  1) $\langle A(S(x), 0), A(x, S(0)) \rangle$
  2) $\langle A(S(x), S(y)), A(x, Ack(S(x), y)) \rangle$
  3) $\langle A(S(x), S(y)), A(S(x), y) \rangle$
- $s > t$ para pelo menos um par dependente $\langle s, t \rangle$ em cada ciclo do DG:✓

Verificando Terminação pelo Grafo de Dependência de Ackermann



- $l \geq r$ para toda regra $l \rightarrow r$ em R:✓
  (1) $Ack(0, y) \rightarrow S(y)$
  (2) $Ack(S(x), 0) \rightarrow Ack(x, S(0))$
  (3) $Ack(S(x), S(y)) \rightarrow Ack(x, Ack(S(x), y))$
- $s \geq t$ para todo par dependente $\langle s, t \rangle$ em um ciclo do DG:✓
  1) $\langle A(S(x), 0), A(x, S(0)) \rangle$
  2) $\langle A(S(x), S(y)), A(x, Ack(S(x), y)) \rangle$
  3) $\langle A(S(x), S(y)), A(S(x), y) \rangle$
- $s > t$ para pelo menos um par dependente $\langle s, t \rangle$ em cada ciclo do DG:✓

Verificando Terminação pelo Grafo de Dependência de Ackermann



- $l \geq r$ para toda regra $l \to r$ em R:✓
  (1) $Ack(0, y) \to S(y)$
  (2) $Ack(S(x), 0) \to Ack(x, S(0))$
  (3) $Ack(S(x), S(y)) \to Ack(x, Ack(S(x), y))$
- $s \geq t$ para todo par dependente $\langle s, t \rangle$ em um ciclo do DG:✓
  1) $\langle A(S(x), 0), A(x, S(0)) \rangle$
  2) $\langle A(S(x), S(y)), A(x, Ack(S(x), y)) \rangle$
  3) $\langle A(S(x), S(y)), A(S(x), y) \rangle$
- $s > t$ para pelo menos um par dependente $\langle s, t \rangle$ em cada ciclo do DG:✓

SCP X DP

- SCG e DP representam as chamadas de símbolos definidos do lado direito de cada regra: Incorporar SCP na abordagem de DP
- SCP não considera TRS's em que a análise de todo o termo e não apenas seus argumentos são necessários para analisar a terminação.

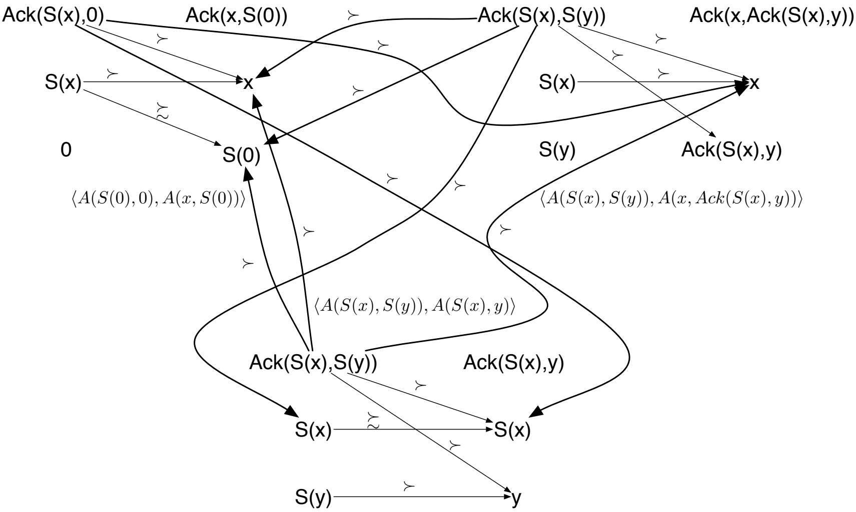
SCG Estendido

- Definido para toda regra $f(s_1, ..., s_n) \rightarrow r$ e subtermo $g(t_1, ..., t_m)$ de r tal que $g \in \mathcal{D}$.
- Dado o Par de Redução $(\succsim, \succ)$, a construção do grafo é dada por:
  1. Nós de entrada V: $s_0 = \epsilon, s_1, ..., s_n$ (Argumentos de f)
  2. Nós de saída W: $t_0 = \epsilon, t_1, ..., t_m$ (Argumentos de g)
  3. Arestas E definidas para todo $\forall s_i, t_j$ como:
     1. Se $s_i \succ t_j$, temos uma aresta rotulada com $\succ$ de s_i para t_j;
     2. Se $s_i \succsim t_j$, temos uma aresta rotulada com $\succsim$ de s_i para t_j;

Multigrafo Estendido

Teremos $G \bullet H$ se G tem nós $D_1, ...D_n$ e H tem nós $D'_1, ..., D'm$ e existe aresta de D_n para D'_1 no GD. $G \bullet H$ então é rotulado com $(D_1, ...D_n, D'_1, ..., D'm)$.

Exemplo - Multigrafo Estendido



Além das arestas originais coloridas do multigrafo.

Prova de Terminação

Teorema 3. Seja $\mathcal{R}$ um TRS sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ com construtores $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ um TRS terminante e não-duplicante sobre $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.

$\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é terminante SSE para todo $\mathcal{R}$-ciclo $\mathcal{P}$ no DG de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ existe par $(\succsim, \succ)$ monotônico em $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^{\#})$ tal que:

1. Todo multigrafo em relação a $(\succsim, \succ)$ rotulado com $\mathcal{P}$ possui uma aresta $i \xrightarrow{\succ} i$
2. $\succsim = \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$ e $\succ = \rightarrow^+_{\mathcal{S}}$ ou $\forall (l \rightarrow r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}) : l \succsim r$

Somente SE

- Pelo Teorema 1., se $\mathcal{R}$ é terminante, então todo multigrafo maximal contém aresta $i \xrightarrow{\succ} i$, também valendo para multigrafos rotulados com $\mathcal{P}$.
- Tomando $\mathcal{S} = \emptyset$, pelo Teorema 2. temos que se $\mathcal{R}$ é terminante, então $\forall (l \rightarrow r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}) : l \succsim r$

Prova de Terminação

Se

Assumindo $\mathcal{R}$ não-terminante, provamos que existe $\mathcal{R}$-ciclo no DG que não satisfaz 2.

- Como $\mathcal{S}$ é terminante, existe cadeia infinita de $\mathcal{R}$ $\langle s_1, t_1\rangle\langle s_2, t_2\rangle \cdots$ onde $s_1 = s^{\#}$ é não terminante minimal.
- No DG temos ciclo $\mathcal{P}$ cujos DP ocorrem infinitas vezes.
- Seja então G_j o multigrafo resultante da concatenação dos SCG correspondentes às partes onde todos pares dependentes de $\mathcal{P}$ ocorrem. Assim, G_j é rotulado com $\mathcal{P}$.
- Por 1 temos que todo H maximal gerado a partir de $G_j's$ também terá aresta $i \xrightarrow{\succ} i$.
- Cadeias infinitas $\Rightarrow$ caminho infinito rotulado com $\succ$.
- Temos então $s_i|\pi_i\sigma \succsim t_i|\pi_{i+1}\sigma$ ou $s_i|\pi_i\sigma \succsim t_i|\pi_{i+1}\sigma$.
- Se $\succsim = \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$ e $\succ = \rightarrow^+_{\mathcal{S}}$, contrariamos a minimalidade de s assim como no Teorema 2.
- Se $l = t_i \succsim r = s_{i+1}$, temos cadeia infinita de redução, contrariando o fato de $\succ$ ser bem fundada, assim como no Teorema 2.

Considerações

Vantagens X Desvantagens

- SCP:
  - Permite simular conceitos de ordem lexicográfica e comparação de multiconjuntos;
  - Precisa usar o mesmo par de redução para toda a prova de terminação
  - Não analiza a raiz dos termos, apenas seus argumentos;
- DP:
  - Permite usar ordens diferentes para ciclos diferentes;
  - Permite analise de recursão mútua diretamente;

Trabalho Futuro

- Formalizar relacão DP sse SCP;
- Investigar essas técnicas para ordem superior;
- Implementar DP e SCP para automação de verificação de terminação de funcões recursivas em provadores de teoremas (Ex: TCC's de terminação em PVS)

- Thomars Arts e Jürgen Giesl (Theoretical Computer Science'2000). Termination of Term Rewriting Using Dependency Pairs
- René Thiemann e Jürgen Giesl (RTA'2003). Size-Change Termination for Term Rewriting
- René Thiemann e Jürgen Giesl. (Lecture Notes in Computer Science'2003). The Size-Change Principle and Dependency Pairs for Termination of Term Rewriting