

Capítulo 10

Estreitamento — reescrita na solução de equações

Após observar a reescrita como um mecanismo usado para a demonstração de teoremas (equacionais), o estreitamento (em inglês *narrowing*) será estudado como um formalismo teórico, baseado em reescrita, apropriado para solução de equações e, portanto, relevante na combinação dos paradigmas de programação lógica e funcional. Pode-se afirmar que o estreitamento tem suas origens no formalismo dedutivo desenvolvido por Robinson e Woss denominado *paramodulação* [RW69], ainda que, inicialmente, o desenvolvimento destes dois formalismos foi totalmente independente. A *paramodulação* é um mecanismo completo para tratar a igualdade nos demonstradores de teoremas baseados na resolução. A paramodulação simplesmente unifica um lado de uma equação com subtermos não-variáveis de cláusulas e substitui pelo outro lado, mas sem nenhuma orientação nas equações, como é o caso do estreitamento. A paramodulação é considerada a regra de inferência lógica que permite estender o paradigma de programação lógico obtendo adicionalmente as vantagens das linguagens de programação funcional. As linguagens com semântica operacional baseada na paramodulação são denominadas lógicas-funcionais.

O tratamento do estreitamento dado por Middeldrop e Hamoen [MH91] é apropriado (veja também [AR92]), pois eles incluem o caso condicional e o puramente equacional. O tema é também abordado para ambos os casos condicional e não-condicional por Dershowitz e Okada [DO90], por Loria na sua tese de doutorado [Lor93] e por Bockmayr [Boc93].

Idéias mais práticas a respeito do uso do estreitamento como mecanismo para a construção de linguagens que combinem os dois paradigmas, são apresentadas originalmente no trabalho de Reddy [Red86], entre outros. Existem linguagens de programação baseados no estreitamento classificados como linguagens *funcionais-lógicas*, como por exemplo a linguagem BABEL [MNKLRA90]. Lock desenvolve formalismos concretos para a implementação eficiente de tal classe de linguagens, na sua tese de doutorado [Loc93].

Revisões excelentes sobre o tema da combinação dos estilos de programação funcional e lógica aparecem no recente manuscrito de Dershowitz [Der96] e no trabalho de Loogen e Winkler [LW95].

Apresentam-se as noções e resultados básicos do estreitamento não-condicional e do condicional.

10.1 Estreitamento não-condicional

Tendo discutido uma das principais aplicações dos TRSs convergentes, i.e., decisão da validade de equações em teorias equacionais, discutir-se-á outra das aplicações relevantes: solução de equações em teorias equacionais.

Definição 10.1.1 *Se (SIG, E) é uma especificação equacional, e s, t termos na assinatura da especificação, uma **solução** de $s = t$ é uma substituição, σ , tal que $s\sigma =_E t\sigma$. Escreve-se $\langle\langle t = s \rangle\rangle_E$ para denotar o **conjunto de soluções** da equação $s = t$ em E , i.e., $\{\sigma \mid E \vdash t\sigma = s\sigma\}$.*

Notação: Seja SUB o conjunto de todas as substituições, e suponha que $\mathcal{X} \subseteq SUB$. Para uma substituição σ , $\mathcal{X}\sigma$ denota o conjunto $\{\tau\sigma \mid \tau \in \mathcal{X}\}$. •

Já que, para cada substituição σ , $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E \supseteq \sigma\langle\langle s\sigma = t\sigma \rangle\rangle_E$, existe a possibilidade de determinar passo a passo o conjunto de soluções $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$. Tal determinação consiste dos seguintes passos:

1. proponha um componente σ de uma solução e “estrite” $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$ para $\sigma\langle\langle s\sigma = t\sigma \rangle\rangle_E$;
2. aplique uma equação de E em um dos lados da nova equação de $s = t$.

Obviamente, passos do segundo tipo preservam a igualdade do conjunto de soluções. Por uma sequência de passos de ambos os tipos, pode-se atingir o conjunto de soluções de uma equação trivial, que é exatamente SUB :

$$\langle\langle s = t \rangle\rangle_E \supseteq \sigma\langle\langle s\sigma = t\sigma \rangle\rangle_E = \sigma\langle\langle u = t\sigma \rangle\rangle_E \supseteq \sigma\sigma^1\langle\langle u\sigma^1 = t\sigma\sigma^1 \rangle\rangle_E \dots = \dots \supseteq \dots \sigma\sigma^1 \dots \sigma^n\langle\langle r = r \rangle\rangle_E$$

O último conjunto de soluções da sequência de “estreitamentos” tem um elemento mais geral que é a substituição $\sigma\sigma^1 \dots \sigma^n$. A palavra “estreitamento” denota um conteúdo formal sobre o método, baseado em reescrita de termos, para realizar uma determinação passo a passo de $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$, como tem sido descrito. Um passo de estreitamento combina um passo do primeiro tipo e um do segundo. Mais precisamente, a relação de estreitamento é definida sobre termos. A seguinte definição é ilustrada na figura 10.1.

Definição 10.1.2 *Suponha que (SIG, E) seja uma especificação equacional dada, equivalente a um TRS R . Seja t um termo na assinatura de SIG tal que $t|_\pi \equiv u$ e seja $l \rightarrow r$ uma variante de uma regra de reescrita em R tal que $Var(t) \cap (Var(l) \cup Var(r)) = \emptyset$. Diz-se que t **estrita** para t' , no subtermo não-variável u , usando a regra $l \rightarrow r$, e substituição $\sigma = mgu(u, l)$, se $t' \equiv t[\pi \leftarrow r]\sigma$.*

Isto é denotado por

$$t \rightsquigarrow_{[\pi, l \rightarrow r, \sigma]} t'$$

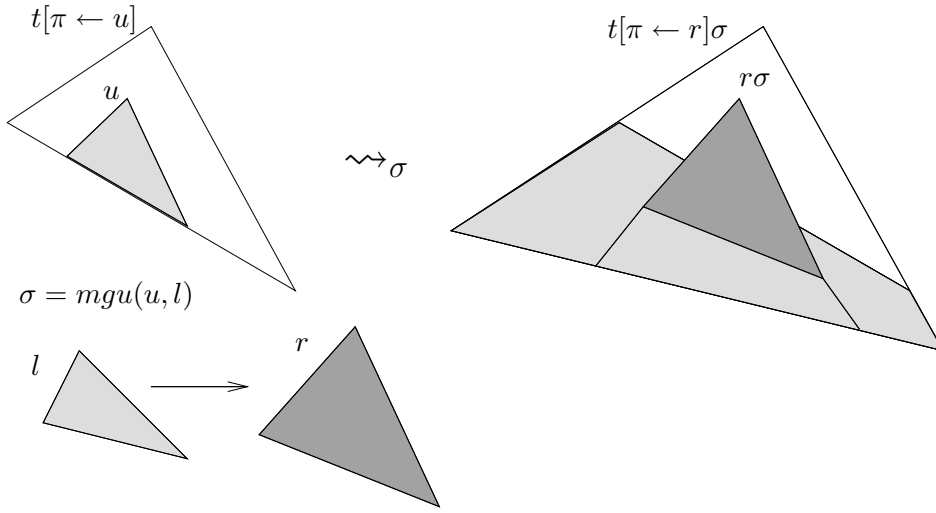


Figura 10.1: Estreitamento

Notação: Por brevidade será escrito simplesmente $t \rightsquigarrow_\sigma t'$, eliminando a posição π e a regra $l \rightarrow r$ do estreitamento, quando isto não produz conflitos. A notação $t \rightarrow_{[\pi, l \rightarrow r, \sigma]} s$ será usada para indicar um passo de reescrita resultante da aplicação da regra $l \rightarrow r$ na posição $\pi \in O(t)$ com substituição σ .

Escrever-se-á $t \rightsquigarrow_\sigma^* t'$ se existe uma sequência de passos de estreitamento

$$t \equiv t_1 \rightsquigarrow_{\sigma_1} t_2 \rightsquigarrow_{\sigma_2} \dots \rightsquigarrow_{\sigma_{n-1}} t_n \equiv t'$$

tal que $\sigma = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$. Se $n = 1$ então $\sigma = \varepsilon$ (a substituição vazia ou identidade). •

A transformação de estreitamento será estendida (de termos) para equações da seguinte maneira: se $t \rightsquigarrow_\sigma t'$, então $(t = s) \rightsquigarrow_\sigma (t' = s\sigma)$ e, similarmente, $(s = t) \rightsquigarrow_\sigma (s\sigma = t')$. Ambas as derivações são denominadas passos de **estreitamento sobre equações**. Como tem sido observado, a palavra estreitamento é referente aos conjuntos de soluções; i.e., se $s = t \rightsquigarrow_\sigma s\sigma = t'$, então $\langle\langle s = t \rangle\rangle_R \supseteq \sigma \langle\langle s\sigma = t' \rangle\rangle_R$, onde $\langle\langle s = t \rangle\rangle_R$ denota o conjunto de soluções com respeito à teoria (equacional) associada ao TRS R .

Usualmente, são objetivos (“goals”) e não equações que são estreitadas (pelo menos com mecanismos baseados em resolução).

Notação: Para simplificar a exposição subsequente, o conjunto de símbolos de função de qualquer TRS será estendido com um novo símbolo binário $=_{\downarrow}^?$ e um novo símbolo de constante *true*.

Subsequentemente, supõe-se que a regra de reescrita

$$x =_{\downarrow}^? x \rightarrow true$$

é incluída em qualquer TRS. As propriedades de confluência e terminação são mantidas na extensão; com efeito, a extensão pode ser facilmente demonstrada conservativa. •

Definição 10.1.3 Um **objetivo**, denotado por $s =_{\downarrow}^? t$, é um par de termos para o qual se buscam soluções no conjunto $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$. Se s e t unificam, então diz-se que o objetivo $s =_{\downarrow}^? t$ **estrita para true** por meio de seu unificador mais geral σ .

Isto é denotado por

$$s =_{\downarrow}^? t \rightsquigarrow_{\sigma} true$$

Exemplo 10.1.4 Considere o TRS definido pelas seguintes regras:

$$R: \quad 0 + x \rightarrow x \\ s(x) + y \rightarrow s(x + y)$$

Os passos de estreitamento apresentados na figura 10.2 resolvem o objetivo $z + z =_{\downarrow}^? s(s(0))$ gerando a solução (única) $\{z/s(0)\}$.

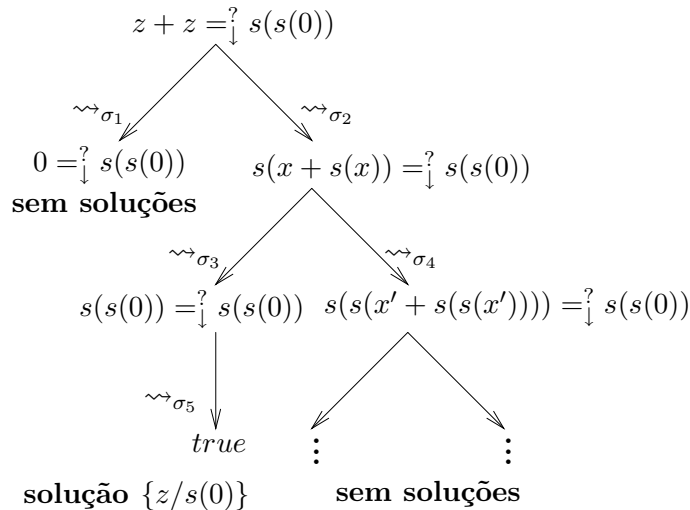


Figura 10.2: Exemplo de estreitamento do objetivo $z + z =_{\downarrow}^? s(s(0))$

Na figura 10.2, $z + z =_1^? s(s(0)) \rightsquigarrow_{\sigma_1} 0 =_1^? s(s(0))$ usando a primeira regra e a substituição $\sigma_1 = \{x/0, z/0\}$; $z + z =_1^? s(s(0)) \rightsquigarrow_{\sigma_2} s(x + s(x)) =_1^? s(s(0))$ usando a segunda regra e a substituição $\sigma_2 = \{y/s(x), z/s(x)\}$; $s(x + s(x)) =_1^? s(s(0)) \rightsquigarrow_{\sigma_3} s(s(0)) =_1^? s(s(0))$ usando a variante $0 + x' \rightarrow x'$ da primeira regra e a substituição $\sigma_3 = \{x/0, x'/s(0)\}$; $s(x + s(x)) =_1^? s(s(0)) \rightsquigarrow_{\sigma_4} s(s(x' + s(s(x')))) =_1^? s(s(0))$ usando a variante $s(x') + y' \rightarrow s(x' + y')$ da segunda regra e a substituição $\sigma_4 = \{x/s(x'), y'/s(s(x'))\}$; finalmente, $s(s(0)) =_1^? s(s(0)) \rightsquigarrow_{\sigma_5} true$ usando a regra de reescrita do sistema estendido, $x =_1^? x \rightarrow true$, e a substituição $\sigma_5 = \{x/s(0)\}$. \diamond

Observe que o processo de estreitamento reduz o espaço de busca do conjunto de soluções, usando, em primeira instância, a orientação das equações e, em seguida, realizando substituições que são tão pequenas e gerais quanto seja possível. Não obstante, para garantir a completude do método de estreitamento, para a solução de equações, é necessário que o TRS correspondente seja convergente.

Notação: O **domínio** de uma substituição $\theta = \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$, é denotado por $\text{Dom}(\theta)$ e a **imagem** de θ , $\text{Var}(t_1) \cup \dots \cup \text{Var}(t_n)$, é denotada por $\text{Im}(\theta)$. \bullet

Note que o estreitamento é uma generalização de reescrita: $t \rightarrow s$ implica $t \rightsquigarrow_{\sigma} s$ para qualquer σ que não tenha variáveis de $\text{Var}(t)$ no seu domínio.

A correção do estreitamento é expressa no seguinte teorema.

Teorema 10.1.5 (Correção do estreitamento) *Seja R um TRS. Se $s =_1^? t \rightsquigarrow_{\sigma}^* true$, então σ é uma solução de $s = t$ (i.e., $\sigma \in \langle\langle s = t \rangle\rangle_R$).*

Demonstração. (Esboço). A demonstração é por indução no comprimento das derivações de estreitamento, $s =_1^? t \rightsquigarrow_{\sigma}^* true$, usando o fato de que $u\tau \rightarrow_R v$ sempre que $u \rightsquigarrow_{\tau} v$. \square

Para estabelecer a completude do estreitamento é necessário um lema de suspensão (*lifting lemma*). Este estabelece que sequências de redução podem ser “suspensas” a derivações de estreitamento.

Definição 10.1.6 *Uma substituição σ está em forma normal ou normalizada com respeito a um TRS R , se para cada variável x no domínio de σ , $x\sigma$ é uma forma normal em R .*

Notação: A **restrição** $\sigma|_{\mathcal{V}}$ de uma substituição σ a um conjunto de variáveis \mathcal{V} é definida como segue: se x é uma variável então $x\sigma|_{\mathcal{V}} = x\sigma$, caso $x \in \mathcal{V}$ e $x\sigma|_{\mathcal{V}} = x$, caso contrário.

Sejam σ e τ substituições e \mathcal{V} um conjunto de variáveis, então $\sigma = \tau|_{\mathcal{V}}$ se $\sigma|_{\mathcal{V}} = \tau|_{\mathcal{V}}$. $\sigma \leq \tau|_{\mathcal{V}}$ se existe uma substituição ρ tal que $\sigma\rho = \tau|_{\mathcal{V}}$.

$\sigma|_{\mathcal{V}}$ denota, também, a restrição de σ às variáveis em \mathcal{V} . \bullet

Lema 10.1.7 (Lema de suspensão [MH91]) *Sejam R um TRS, s e t termos na assinatura de R , θ uma substituição normalizada com respeito a R e \mathcal{V} um conjunto de variáveis tais que $\text{Var}(s) \cup \text{Dom}(\theta) \subseteq \mathcal{V}$ e $t \equiv s\theta$. Se $t \rightarrow^* t'$, então existe um termo s' e substituições θ' e σ tais que*

- $s \rightsquigarrow_{\sigma}^* s'$,
- $s'\theta' \equiv t'$,
- $\sigma\theta' = \theta[\mathcal{V}]$,
- θ' está normalizada.

Demonstração. A demonstração é por indução sobre o comprimento da sequência de passos de estreitamento.

Base da indução. $n = 0$, trivial.

Passo de indução. Suponha que $t \rightarrow t_1 \rightarrow^n t'$.

Aplica-se indução como ilustrado na figura 10.3. Mostra-se primeiro para o caso $t \rightarrow t_1$.

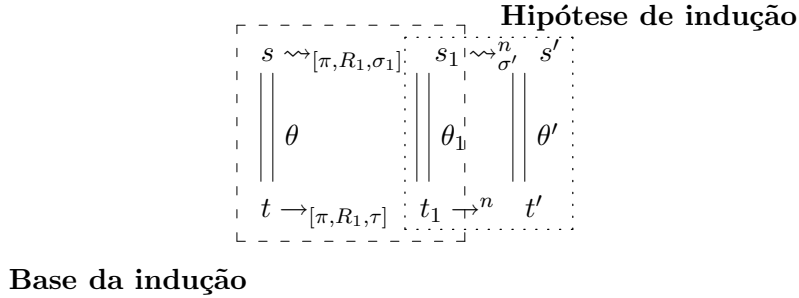


Figura 10.3: Ilustração dos passos indutivos da demonstração do lema de suspensão

Se $t \rightarrow t_1$, então existem uma posição $\pi \in O(t)$, uma variante de uma regra $R_1 \equiv l \rightarrow r \in R$ e uma substituição τ tais que $t \rightarrow_{[\pi, R_1, \tau]} t_1$. Como θ é uma substituição normalizada tem-se que $\pi \in O(t)$, sendo π uma posição não variável de t , logo $t|_{\pi} \equiv (s\theta)|_{\pi} \equiv (s|_{\pi})\theta$ e $t|_{\pi} \equiv l\tau$. Seja $\mu = \tau \cup \theta$. Como se pode supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{V} \cap \text{Var}(l) = \emptyset$ e $\text{Dom}(\tau) \subset \text{Var}(l)$ tem-se que $\mu = \theta[\mathcal{V}]$ e $\mu = \tau[\text{Var}(l)]$. Assim, $(s|_{\pi})\mu \equiv (s|_{\pi})\theta \equiv t|_{\pi} \equiv l\tau \equiv l\mu$; logo, existem $\sigma_1 = \text{mgu}\{s|_{\pi}, l\}$ e ρ tais que $\sigma_1\rho = \mu = \theta \cup \tau$.

Seja $s_1 \equiv s[\pi \leftarrow r]\sigma_1$ então, pela definição de estreitamento, $s \rightsquigarrow_{[\pi, R_1, \sigma_1]} s_1$. Observe a figura 10.3. Tomando $\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V} - \text{Dom}(\sigma_1)) \cup \text{Im}(\sigma_1)$ e $\theta_1 = \rho|_{\mathcal{V}_1}$ tem-se que $\text{Var}(s_1) \subseteq \mathcal{V}_1$. Assim $s_1\theta_1 = t_1$ e $(\sigma_1\theta_1) = (\sigma_1\rho)[\mathcal{V}]$ e como $\sigma_1\rho = \mu$ e $\mu = \theta[\mathcal{V}]$, obtém-se, $\sigma_1\theta_1 = \theta[\mathcal{V}]$. Seja $\mathcal{V}_2 = (\mathcal{V} - \text{Dom}(\sigma_1)) \cup \text{Im}(\sigma_1)|_{\mathcal{V}}$, então $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1$. Assim $\text{Dom}(\sigma_1) \subseteq \mathcal{V}_2$. Seja $x \in \mathcal{V}_2$ então deve

ocorrer um, e somente um, dos seguintes casos:

(1) $x \in (\mathcal{V} - \text{Dom}(\sigma_1))$, neste caso $x\theta_1 = x\theta$, que é uma forma normal por hipótese.

(2) $x \in \text{Im}(\sigma_1)|_{\mathcal{V}}$, neste caso existe $y \in \mathcal{V}$ com $x \in \text{Var}(y\sigma_1)$, assim $x\theta_1 \subseteq (y\sigma_1)\theta_1 = y(\sigma_1\theta_1) = y\theta$, que é uma forma normal por hipótese.

Portanto θ_1 é uma substituição normalizada. Isto mostra que a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Pela hipótese de indução tem-se que $s_1 \rightsquigarrow_{\sigma'}^n s'$, $s'\theta' = t'$, $\sigma'\theta' = \theta_1[\mathcal{V}_1]$ e θ' é normalizada. Pode-se assumir que $s_1 \rightsquigarrow_{\sigma'}^n t_1$ e $t_1 \rightarrow_R^n t'$ aplica as mesmas regras de reescrita nas mesmas posições. Do fato que $s \rightsquigarrow_{\sigma_1} s_1$ e $s_1 \rightsquigarrow_{\sigma'}^n s'$, obtém-se $s \rightsquigarrow_{\sigma}^{n+1} s'$ com $\sigma = \sigma_1\sigma'$. Além disso $\sigma_1\sigma'\theta' \equiv \theta[\mathcal{V}]$. Portanto, a afirmação é verdadeira. \square

Notação: Sejam δ e ρ substituições. $\delta \leq \rho$ será usado para denotar que δ é uma substituição mais geral que ρ (i.e., $\exists \phi$ tal que $\delta\phi = \rho$). \bullet

Definição 10.1.8 *Uma substituição δ é mais geral com respeito a R que ρ se existe uma substituição ϕ tal que $\delta\phi \leftrightarrow_R^* \rho^1$. Isto é denotado por $\delta \leq_R \rho$.*

A completude do estreitamento é provada no seguinte teorema.

Teorema 10.1.9 (Completude do estreitamento) *Seja R um TRS convergente. Se $\sigma \leftrightarrow_R^* t\sigma$, então existe uma derivação de estreitamento $s = \downarrow t \rightsquigarrow_{\tau}^* \text{true}$ tal que $\tau \leq_R \sigma[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$.*

Demonstração. Seja σ' uma forma normal de σ , i.e., $\sigma' = \{x/\overline{x\sigma} \mid x \in \text{Dom}(\sigma)\}$. Note que $\sigma \leftrightarrow_R^* \sigma'$ e que $\sigma' \leftrightarrow_R^* t\sigma'$. A confluência de R garante que $\sigma' \downarrow t\sigma'$. Portanto, existe uma seqüência de reescrita da forma $\sigma' = \downarrow t\sigma' \rightarrow^* \text{true}$. Pelo lema de suspensão existe uma derivação de estreitamento $s = \downarrow t \rightsquigarrow_{\tau}^* \text{true}$ e uma substituição σ'' tais que $\tau\sigma'' = \sigma'[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$. Assim, $\tau \leq \sigma'[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$. Já que $\sigma \leftrightarrow_R^* \sigma'$, conclui-se que $\tau \leq_R \sigma[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$. \square

Os seguintes exemplos ilustram a necessidade das hipóteses no teorema de completude do estreitamento.

Exemplo 10.1.10 O sub-índice R em $\tau \leq_R \sigma[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$ é necessário. Considere o seguinte TRS:

$$R: \quad \begin{array}{l} f(b) \rightarrow g(b) \\ a \rightarrow b \end{array}$$

$\sigma = \{x/a\}$ é uma solução para $f(x) = \downarrow g(x)$, mas como resposta computada unicamente é encontrada a substituição $\tau = \{x/b\}$, sempre que no estreitamento (é na própria reescrita) são sempre selecionados subtermos não-variáveis. \diamond

¹ $\sigma \leftrightarrow_R^* \tau$ sse $\forall x \in \text{Dom}(\sigma) \cup \text{Dom}(\tau)$, $x\sigma \leftrightarrow_R^* x\tau$.

Exemplo 10.1.11 A convergência de R é necessária. Considere o seguinte TRS:

$$R: \quad \begin{array}{l} a \rightarrow c \\ a \rightarrow b \end{array}$$

Observe que R não é confluyente. O objetivo $b =_? c$ não pode ser solucionado; i.e., não se pode encontrar a substituição ε .

Para ver que a terminação é também necessária, considere o seguinte TRS confluyente, mas não terminante:

$$R: \quad c \rightarrow f(c)$$

O objetivo $x =_? f(x)$ tem uma solução, $\{x/c\}$, mas esta não pode ser encontrada, sempre que o único subtermo onde um passo de estreitamento pode ser aplicado é $f(x)$ e este não se unifica com c . Lembre-se que o estreitamento não pode ser realizado em subtermos variáveis.

◇

Definição 10.1.12 *Seja R um TRS. Um conjunto Σ de substituições é um conjunto completo de soluções dos termos s e t se para toda $\sigma \in \Sigma$, $\text{Dom}(\sigma) \subset (\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t))$, σ é uma solução de $s =_? t$ e para toda solução τ de $s =_? t$ existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma \leq_R \tau[\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$.*

Corolário 10.1.13 *Seja R um TRS convergente. Então o conjunto $\{\sigma|_{\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)} | s =_? t \rightsquigarrow_{\sigma}^* \text{true}\}$ é um conjunto completo de soluções de $s =_? t$.*

10.2 Estreitamento Condicional

Formalizar-se-á a noção de estreitamento condicional, que é apropriada no tratamento do problema de busca de soluções para teoremas equacionais em teorias apresentadas por sistemas de reescrita condicionais (i.e., teorias apresentadas por axiomas condicionais equacionais positivos ou quasivariiedades). A reescrita condicional é basicamente um mecanismo para operacionalizar a dedução da validade de teoremas equacionais em tais teorias. Pode-se interpretar o estreitamento condicional como um mecanismo construtivo para verificar a consistência de fórmulas equacionais em tais teorias.

Lembre-se que $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$ denota o conjunto de soluções de $s = t$, i.e., $\{\sigma | s\sigma \leftrightarrow_E t\sigma\}$. Um objetivo, denotado por $s =_? t$, é um par de termos para os quais buscam-se soluções em $\langle\langle s = t \rangle\rangle_E$. Se s e t unificam, então diz-se que o objetivo $s =_? t$ “estrita para *true*” por meio de seu unificador mais geral. Da mesma maneira que para o caso não condicional, introduz-se a nova regra conservativa $x =_? x \rightsquigarrow \text{true}$.

O estreitamento condicional define-se da seguinte maneira.

Definição 10.2.1 *Seja R um sistema de reescrita condicional. Se existe uma variante de uma regra condicional $c : l \rightarrow r \in R$ tal que l unifica com um subtermo não variável de s (ou t) por meio do unificador mais geral σ (a variante da regra é selecionada de maneira tal que suas variáveis sejam diferentes das variáveis ocorrendo em s), então todas as condições em $c\sigma$ são estreitadas sucessivamente até serem resolvidas, seja pela substituição τ . Então diz-se que o objetivo original $s \stackrel{?}{=} t$ estreita para $s\sigma\tau \stackrel{?}{=} t\sigma\tau$ por meio da substituição composta $\sigma\tau$.*

Observe que o processo de estreitamento é linear, sempre que as regras são sobrepostas somente nos objetivos e não em outras regras.

Exemplo 10.2.2 considere o sistema de reescrita condicional padrão para o *append*:

$$\begin{array}{lcl} & null(nil) \rightarrow t & \\ & null(cons(x, y)) \rightarrow f & \\ & car(cons(x, y)) \rightarrow x & \\ & cdr(cons(x, y)) \rightarrow y & \\ null(x) = t & : & append(x, y) \rightarrow y \\ null(x) = f & : & append(x, y) \rightarrow cons(car(x), append(cdr(x), y)) \end{array}$$

O objetivo $append(x, y) \stackrel{?}{=} x$ estreita usando a última regra, sempre que $null(x) \stackrel{?}{=} f$ estreite a *true*. Usando a variante $null(cons(u, v)) \rightarrow f$, pode-se solucionar o objetivo $null(x) \stackrel{?}{=} f$, estreitando o objetivo original para $cons(car(cons(u, v)), append(cdr(cons(u, v)), y)) \stackrel{?}{=} cons(u, v)$. A reescrita é, novamente, um caso especial do estreitamento que, neste caso, reduz o objetivo para $cons(u, append(v, y)) \stackrel{?}{=} cons(u, v)$. O último estreita, por sua vez, usando a primeira regra para o *append*, sempre que $null(v) \stackrel{?}{=} t$ estreite a *true*. Ligando v com *nil*, estreita-se para um novo objetivo $cons(u, y) \stackrel{?}{=} cons(u, nil)$. Já que os dois últimos termos são unificáveis, ligando y com v , o processo de estreitamento produz a solução $\{x/cons(u, nil), y/nil, v/nil\}$. \diamond

No caso puramente equacional, demonstra-se que o estreitamento é completo para TRSs (basicamente) convergentes. Entende-se por “completo”, que se existe uma substituição σ tal que $s\sigma \leftrightarrow^* t\sigma$, então $s \stackrel{?}{=} t$ estreita para *true*. O mesmo vale para a variante do estreitamento, em que os termos são reduzidos para formas normais antes de aplicar o estreitamento. Para sistemas condicionais o resultado correspondente é que, sob as mesmas hipóteses, qualquer objetivo satisfazível equacionalmente pode ser solucionado por meio do estreitamento condicional.

Como alternativa da definição anterior, apresenta-se a de Bockmayr como em [MH91].

Definição 10.2.3 *Uma cláusula de objetivo S é um multi-conjunto de objetivos. \tilde{c} denota a cláusula de objetivos formada com as equações em uma variante da regra $c : l \rightarrow r$.*

Definição 10.2.4 *Seja R um sistema de reescrita condicional (sem restrições nas variáveis). Uma cláusula de objetivos S estreita condicionalmente para a cláusula de objetivos T se existe um objetivo $e \in S$, uma posição π em e , uma variante $c : l \rightarrow r$ de uma regra em R e uma substituição σ tais que σ é um unificador mais geral de $e|_{\pi}$ e l e*

$$T = (S - \{\{e\}\} \cup \{\{e[\pi \leftarrow r]\}\} \cup \{\tilde{c}\})\sigma$$

Usar-se-á a notação $S \rightsquigarrow_{\sigma} T$.

De fato, se existe um objetivo $e \in S$ tal que e unifica por meio do unificador mais geral σ , então S estreita condicionalmente para $(S - \{\{e\}\})\sigma \cup \{\{true\}\}$.

Notação: O símbolo \top é usado genericamente para multi-conjuntos consistentes de um número finito de *true*'s. •

Exemplo 10.2.5 Considere novamente o sistema condicional padrão para *append* apresentado no exemplo anterior e o objetivo $append(x, y) =_{\downarrow}^? x$. A cláusula do objetivo estreita para \top da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} \{\{append(x, y) =_{\downarrow}^? x\}\} \rightsquigarrow \\ \{\{cons(car(x), append(cdr(x), y)) =_{\downarrow}^? x, null(x) =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow_{\{x/cons(u,v)\}} \\ \{\{cons(car(cons(u, v)), append(cdr(cons(u, v)), y)) =_{\downarrow}^? cons(u, v), f =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow^* \\ \{\{cons(u, append(v, y)) =_{\downarrow}^? cons(u, v), f =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow \\ \{\{cons(u, y) =_{\downarrow}^? cons(u, v), null(v) =_{\downarrow}^? t, f =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow_{\{v/nil\}} \\ \{\{cons(u, y) =_{\downarrow}^? cons(u, nil), t =_{\downarrow}^? t, f =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow_{\{y/nil\}} \\ \{\{cons(u, nil) =_{\downarrow}^? cons(u, nil), t =_{\downarrow}^? t, f =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow^* \\ \{\{true, true, true\}\} = \\ \top \end{array}$$

◇

Exemplo 10.2.6 Considere o seguinte sistema de reescrita condicional para o problema de paridade.

$$\begin{array}{l} even(0) \rightarrow t \\ even(s(x)) \rightarrow odd(x) \\ even(x) = f \quad : \quad odd(x) \rightarrow t \\ even(x) = t \quad : \quad odd(x) \rightarrow f \end{array}$$

A solução $\{y/s(0)\}$ do objetivo $even(s(y)) =_{\downarrow}^? t$ é encontrada por estreitamento condicional da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} \{\{even(s(y)) =_{\downarrow}^? t\}\} \rightsquigarrow \\ \{\{odd(y) =_{\downarrow}^? t\}\} \rightsquigarrow \\ \{\{t =_{\downarrow}^? t, even(y) =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow_{\{y/s(x)\}} \\ \{\{t =_{\downarrow}^? t, odd(x) =_{\downarrow}^? f\}\} \rightsquigarrow \\ \{\{t =_{\downarrow}^? t, f =_{\downarrow}^? f, even(x) =_{\downarrow}^? t\}\} \rightsquigarrow_{\{x/0\}} \\ \{\{t =_{\downarrow}^? t, f =_{\downarrow}^? f, t =_{\downarrow}^? t\}\} \rightsquigarrow^* \\ \{\{true, true, true\}\} = \\ \top \end{array}$$

◇

Notação: Para uma cláusula de objetivos T , escreve-se $R \vdash T$ sempre que $T \rightarrow_R^* \top$. •

Definição 10.2.7 σ é uma R -solução (ou por brevidade solução) de uma cláusula de objetivos S se $R \vdash S\sigma$.

A correção do estreitamento condicional é expressa no seguinte lema.

Lema 10.2.8 Seja R um sistema de reescrita condicional e T uma cláusula de objetivos. Se $T \rightsquigarrow_{\sigma}^* \top$ então $R \vdash T\sigma$.

Demonstração. A demonstração é por indução no comprimento da derivação de estreitamento de T para \top .

O caso de comprimento zero é trivial.

Suponha $T \rightsquigarrow_{\sigma_1} T_1 \rightsquigarrow_{\sigma_2}^* \top$ usando a regra $c : l \rightarrow r \in R$ na posição π do objetivo $e \in T$ no primeiro passo da derivação de estreitamento.

Seja $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. Por definição $T_1 = (T - \{e\}) \cup \{e[\pi \leftarrow r]\} \cup \tilde{c}\sigma_1$. A hipótese de indução implica que $R \vdash T_1\sigma_2$. Assim, $R \vdash (T - \{e\}) \cup \{e[\pi \leftarrow r]\}\sigma$ e $R \vdash \tilde{c}\sigma$. Do último obtém-se que $l\sigma \rightarrow_R r\sigma$ e consequentemente $T\sigma \rightarrow_R T\sigma - \{e\sigma\} \cup \{e\sigma[r\sigma]\pi\}$.

Já que $T\sigma - \{e\sigma\} \cup \{e\sigma[r\sigma]\pi\} = (T - \{e\}) \cup \{e[\pi \leftarrow r]\}\sigma$, obtém-se $R \vdash T\sigma$. □

Para comparar a reescrita condicional e o estreitamento condicional, define-se uma nova relação sobre cláusulas de objetivos.

Definição 10.2.9 Seja R um sistema de reescrita condicional e suponha que S e T são cláusulas de objetivo. Escreve-se $S \xrightarrow{c} T$ se existe um objetivo $e \in S$, uma posição π em e , uma variante $c : l \rightarrow r$ de uma regra em R e uma substituição σ tais que $e|_{\pi} \equiv l\sigma$, $T = S - \{e\} \cup \{e[\pi \leftarrow r\sigma]\} \cup \tilde{c}\sigma$ e $R \vdash \tilde{c}\sigma$.

Para sistemas de reescrita condicionais com avaliação recursiva das condições padrão (i.e., por juntabilidade das condições com aplicação da mesma relação de reescrita) sem variáveis extras (i.e., sem variáveis na condição que não ocorrem no lado esquerdo da conclusão das regras) a relação \xrightarrow{c} pode ser vista como um caso especial da relação de estreitamento condicional \rightsquigarrow , mas, em geral, \xrightarrow{c} não é contida em \rightsquigarrow , como consequência da possível existência de variáveis extras nas regras condicionais.

Teorema 10.2.10 *Seja R um sistema de reescrita condicional e T uma cláusula de objetivo. Então, $R \vdash T$ sse $T \xrightarrow{c \rightarrow^*} \top$.*

Demonstração. Por indução usando a definição de \rightarrow_R e o fato de que $T \xrightarrow{c \rightarrow^*} (S - \{\{e\}\} \cup \{\{e[\pi \leftarrow r\sigma]\}\} \cup \tilde{c}\sigma)$ sse $\tilde{c}\sigma \rightarrow_R^* \top$. \square

Como para o caso dos TRSs, é necessário um lema de suspensão para demonstrar a completude do estreitamento condicional (para sistemas de reescrita condicional sem variáveis extras).

Lema 10.2.11 (Lema de suspensão condicional) *Seja R um sistema de reescrita condicional sem variáveis extras. Suponha duas cláusulas de objetivo S e T , uma substituição normalizada θ e um conjunto \mathcal{V} de variáveis tal que $Var(S) \cup Dom(\theta) \subset \mathcal{V}$ e $T = S\theta$. Se $T \xrightarrow{c \rightarrow^*} T'$ então existe uma cláusula de objetivo S' e substituições θ', σ tais que:*

- $S \rightsquigarrow_{\sigma}^* S'$,
- $S'\theta' = T'$,
- $\sigma\theta' = \theta[\mathcal{V}]$,
- θ' é normalizada.

Adicionalmente, pode-se supor que a derivação de estreitamento $S \rightsquigarrow_{\sigma}^ S'$ e a sequência de reescrita $T \xrightarrow{c \rightarrow^*} T'$ usem as mesmas regras de reescrita nas mesmas posições nos mesmos objetivos.*

Demonstração. Veja [MH91]. \square

Teorema 10.2.12 *O estreitamento é completo para sistemas de reescrita condicionais padrão (basicamente) convergentes (sem variáveis extras).*

Demonstração. Seja σ uma solução de uma cláusula de objetivo T ; i.e., $R \vdash T\sigma$. Seja σ' uma forma normal de σ . Obtém-se $R \vdash T\sigma'$ da confluência de R . De acordo como último teorema, existe uma sequência $T\sigma' \xrightarrow{c \rightarrow^*} \top$. O lema de suspensão implica que existe uma derivação de estreitamento $T \rightsquigarrow_{\tau}^* \top$ e uma substituição σ'' tais que $\tau\sigma'' = \sigma'[Var(t)]$. Consequentemente, $\tau \leq \sigma'[Var(T)]$, o que implica que $\tau \leq_R \sigma[Var(T)]$. \square

Se as regras condicionais são usadas para operacionalizar a dedução em especificações apresentadas com cláusulas de Horn, não serão aceitáveis restrições nas variáveis (ainda que isto sempre seja feito), sempre que, mesmo para relações simples, como a lei cancelativa, a transitividade, etc., precisa-se de usar variáveis extras nas condições.

A reescrita condicional pode ser redefinida, no caso de existência de variáveis extras, da seguinte maneira:

ordem bem-fundada, extensão da nova relação de reescrita, \rightarrow , e da relação de subtermo próprio e para a qual $l\sigma$ é maior que ambos os termos de cada equação na condição $c\sigma\tau$, para qualquer substituição normalizada τ . O sistema de reescrita do último exemplo satisfaz tal propriedade. Note que a juntabilidade das condições deve ser testada como $x \rightarrow^* \text{cons}(u, v) \wedge \text{append}(v, y) \rightarrow^* z$ se as novas variáveis são irreduzíveis.

Teorema 10.2.17 *O estreitamento é completo para sistemas de reescrita condicionais padrão basicamente confluentes.*

Demonstração. Veja [DO90].

□

Exercícios do Capítulo 10

Exercício 10.1 Considere as seguintes regras de reescrita para o *append* de listas:

$$\begin{aligned} \text{append}(\text{nil}, y) &\rightarrow y \\ \text{append}([a|x], y) &\rightarrow [a|\text{append}(x, y)] \end{aligned}$$

Estreite os objetivos $\text{append}([2|x], y) =_{\downarrow}^? [3, 4]$, $\text{append}(x, y) =_{\downarrow}^? [1, 2, 3, 4]$ e $\text{append}(x, [1, 2, 3]) =_{\downarrow}^? [a|z]$.

Exercício 10.2 Demonstre o lema 10.1.5.

Exercício 10.3 Demonstre em detalhe o teorema 10.1.9.

Exercício 10.4 Demonstre o corolário 10.1.13.