Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
09 de Maio de 2011
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Monitor: Thiago Mendonça Ferreira Ramos

Dedução natural

1. (4.0 pontos) Considere a seguinte dedução Γ_1 da regra de contra posição:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Delta}{p\vee\neg p} \qquad \dfrac{[\neg p]^x}{\neg q\to\neg p}\,{\to}\,i,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q]^z \quad \dfrac{[p]^y \quad [p\to q]^u}{q}\,{\to}\,e}{\bot}\,\neg e}{\neg p}\,\bot e}{\neg q\to\neg p}\,{\to}\,i,z}{\neg q\to\neg p}\,\vee e,x,y}{(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)}\,{\to}\,i,u$$

   (a) (2.0) Complete a dedução, apresentando uma árvore de dedução natural Δ da lei do meio excluído; i.e., uma dedução de $\vdash p\vee\neg p$.

   R/

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(p\vee\neg p)]^l \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p\vee\neg p)]^l \quad \dfrac{[p]^m}{p\vee\neg p}\,\vee i}{\bot}\,\neg e}{\neg p}\,\neg i,m}{p\vee\neg p}\,\vee i}{\bot}\,\neg e}{p\vee\neg p}\,\text{PBC},l$$

   (b) (2.0) Apresente uma árvore de dedução natural Γ_2 do recíproco:

$$\vdash(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$$

   R/

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Delta}{q\vee\neg q} \qquad \dfrac{[q]^x}{p\to q}\,{\to}\,i,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^z \quad \dfrac{[\neg q\to\neg p]^u \quad [\neg q]^y}{\neg p}\,{\to}\,e}{\bot}\,\neg e}{q}\,\bot e}{p\to q}\,{\to}\,i,z}{p\to q}\,\vee e,x,y}{(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)}\,{\to}\,i,u$$

2. (2.0 pontos) Complete a dedução da lei de Pierce embaixo descrita, construíndo árvores de dedução natural Π_3 e Π_4 para

(a) (1.0) $\neg(((A \to B) \to A) \to A) \vdash (A \to B) \to A$ e

R/

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\neg((A \to B) \to A)]^x}{\neg A \to \neg((A \to B) \to A)} \to i, \emptyset \\ \Gamma_2(1b) \\ ((A \to B) \to A) \to A\end{array}}{\bot} \neg e}{(A \to B) \to A} \text{PBC}, x$$

(b) (1.0) $\neg(((A \to B) \to A) \to A) \vdash \neg A$.

R/

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \qquad \dfrac{[A]^y}{((A \to B) \to A) \to A} \to i, \emptyset}{\bot} \neg e}{\neg A} \neg i, y$$

Considere a seguinte agrumentação sobre a correção da Lei de Peirce tomada da Wikipedia:

Para mostrar que a implicação $((A \to B) \to A) \to A$ *é válida supõe-se, por absurdo, que ela é falsa, isto é,* $\neg(((A \to B) \to A) \to A)$. *Portanto,* $((A \to B) \to A)$ *é verdadeira e* A *é falsa, de onde,* $A \to B$ *é falsa, e portanto* A *é verdadeira, o que resulta em um absurdo.*
Conclui-se que $((A \to B) \to A) \to A$.

Construir-se-á uma árvore de dedução natural traduzindo a argumentação precedente. P.ex., *"Portanto,* $((A \to B) \to A)$ *é verdadeira e* A *é falsa, de donde,* $A \to B$ *é falsa"* pode ser expressa na seguinte dedução, Π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^u \quad (A \to B) \to A}{A} \to e \qquad \neg A}{\bot} \neg e}{\neg(A \to B)} \neg i, u$$

E a seguir, *", e portanto* A *é verdadeira"*, na seguinte árvore de dedução, Π_2:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \neg(A \to B)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\neg A]^v}{\neg B \to \neg A} \to i, \emptyset \\ \Gamma_2(\text{item 1b}) \\ A \to B\end{array}}{\bot} \neg e}{A} \text{PBC}, v$$

Utilizando as deduções Π_1 e Π_2 e deduções Π_3 e Π_4 de que *"se* $\neg(((A \to B) \to A) \to A)$ *então* $((A \to B) \to A)$ *é verdadeira e* A *é falsa"*, a saber:

$$\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \\ \Pi_3 \\ (A \to B) \to A\end{array}$$

e

$$\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \\ \Pi_4 \\ \neg A\end{array}$$

Pode-se obter a dedução da Lei de Peirce, por contradição:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \\ \Pi_4 \\ \neg A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \\ \Pi_3 \\ (A \to B) \to A\end{array} & \begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \\ \Pi_4 \\ \neg A\end{array}\end{array} \\ \Pi_1 \\ \neg(A \to B) \\ \Pi_2 \\ A\end{array}}{\perp}\,\neg e}{((A \to B) \to A) \to A}\,\text{PBC}, w$$

Semântica

3. (4.0 pontos)

(a) (1.0) Construa uma fórmula em forma normal conjuntiva equivalente à Lei de Peirce

$$((A \to B) \to A) \to A$$

Utilize os algoritmos específicos para esta tarefa descritos no texto da disciplina.

R/

CNF(NNF(IMPL_FREE($((A \to B) \to A) \to A$))) =
CNF(NNF($\neg$IMPL_FREE($(A \to B) \to A$) $\vee$ IMPL_FREE(A))) =
CNF(NNF($\neg$($\neg$IMPL_FREE($A \to B$) $\vee$ IMPL_FREE(A)) $\vee$ A)) =
CNF(NNF($\neg$($\neg$($\neg$IMPL_FREE(A) $\vee$ IMPL_FREE(B)) $\vee$ A) $\vee$ A)) =
CNF(NNF($\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee A) \vee A$)
. . . (todos os passos devem ser includídos na resposta)
CNF($((\neg A \vee B) \wedge \neg A) \vee A$)
. . . (todos os passos devem ser includídos na resposta)
$(\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee A)$

(b) (3.0) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de Pierce é válida; i.e., demonstre que a negação da Lei de Pierce é insatisfazível:

i. (1.0) Transforme a negação da Lei de Pierce numa fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional, utilizando o operador T;

R/

$$\begin{array}{l}T(\neg(((A \to B) \to A) \to A)) = \\ \ldots \\ \neg\neg(T((A \to B) \to A) \wedge \neg A) = \\ \ldots \\ \neg\neg(\neg(T(A \to B) \wedge \neg A) \wedge \neg A) = \\ \ldots \\ \neg\neg(\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg A) \wedge \neg A)\end{array}$$

ii. (1.0) Construa um DAG para esta fórmula;

R/ Veja Figura 1.

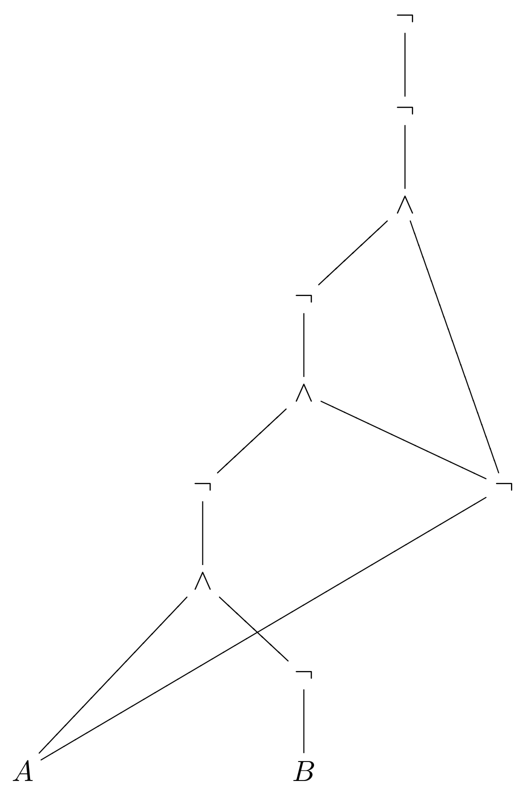

Figure 1: DAG para $\neg\neg(\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg A) \wedge \neg A)$

iii. (1.0) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que está fórmula é insatisfazível.
R/ Veja Figura 2.

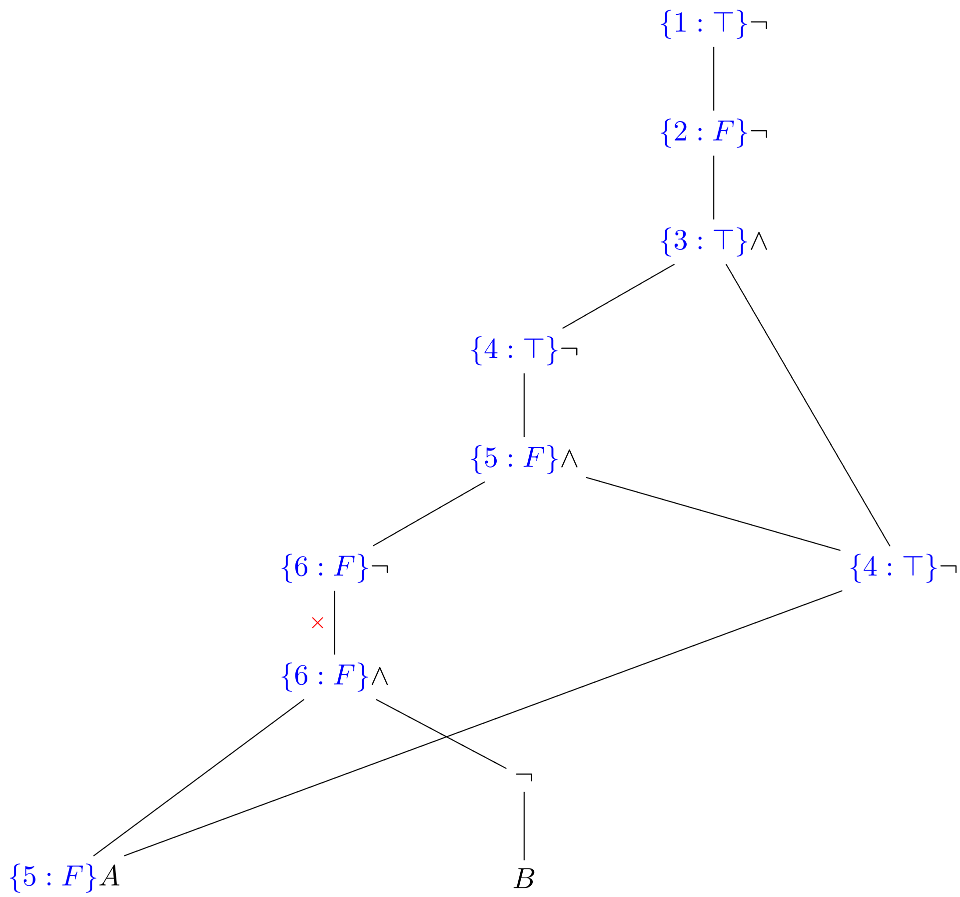

Figure 2: Verificação da (in)satisfazibilidade de $\neg\neg(\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg A) \wedge \neg A)$