Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução Natural

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
6 de Maio de 2012
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
<u>Inicio</u>: 16:00; <u>Fim</u>: 17:45
Duas Páginas, três questões

Dedução natural

1. (4.0 pontos) **Construa deduções** das seguintes versões de *modus tollens* **e demonstre** qual delas é intuicionista e qual delas é clássica.
Ajuda: para demonstrar que uma regra é intuicionista, basta apresentar uma derivação puramente intuicionista. Para demonstrar que uma regra é clássica, basta mostrar que uma regra estritamente clássica pode ser derivada desta.

   (a) (1.0 pontos) Apresente uma dedução para:

$$\frac{\neg\psi \qquad \phi \to \psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT}_1$$

   (b) (1.0 pontos) Demonstre se MT_1 é intuicionista ou estritamente clássico.
R/

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^x \qquad (\phi \to \psi)}{\psi}\,(\to_e) \qquad (\neg\psi)}{\bot}\,(\neg_e)}{(\neg\phi)}\,(\neg_i)\ x$$

   MT_1 é intuicionista sempre que não foram utilizadas regras de dedução estritamente cássicas nesta derivação.

   (c) (1.0 pontos) Apresente uma dedução para

$$\frac{\psi \qquad \neg\phi \to \neg\psi}{\phi}\ \mathrm{MT}_2$$

   (d) (1.0 pontos) Demonstre se MT_2 é intuicionista ou estritamente clássico.
R/

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^x \qquad (\neg\phi \to \neg\psi)}{\neg\psi}\,(\to_e) \qquad \psi}{\bot}\,(\neg_e)}{(\phi)}\,(\mathrm{PBC})$$

MT_2 é clássico sempre que eliminação da dupla negação pode ser derivada desta regra:

$$\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{[\neg\alpha]^u}{\neg\alpha \to \neg\alpha}\,(\to_i)\ u}{\alpha}\ \mathrm{MT}_2$$

2. (4.0 pontos) Construa deduções da seguinte versão de uma das Leis de De Morgan:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \dashv\vdash p \vee q$$

(a) (2.0 pontos) Construa uma prova por dedução natural, indicando o nome de cada uma das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

R/

$$\dfrac{\dfrac{p \vee q \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p \wedge \neg q]^u}{\neg p}\,(\wedge_e) \qquad [p]^x}{\bot}\,(\neg_e) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p \wedge \neg q]^u}{\neg q}\,(\wedge_e) \qquad [q]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e)\ x, y}{\neg(\neg p \wedge \neg q)}\,(\neg_i)\ u$$

(b) (2.0 pontos) Construa uma prova por dedução natural, indicando o nome de cada uma das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash p \vee q$$

R/

$$\dfrac{\dfrac{}{q \vee \neg q}\ \mathrm{LEM} \qquad \dfrac{[q]^x}{p \vee q}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg p \wedge \neg q) \qquad \dfrac{[\neg p]^u \qquad [\neg q]^y}{\neg p \wedge \neg q}\,(\wedge_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{p}\,(\mathrm{PBC})\ u}{p \vee q}\,(\vee_i)}{p \vee q}\,(\vee_e)\ x, y$$

Semântica

2. (2.0 pontos) Na lógica proposicional, dado um sequente $\phi \vdash \psi$, podemos verificar sua validade de duas formas, com duas etapas cada:

   (a) Determinando que
      i. $\phi \to \psi$ é uma tautologia e,
      ii. então, concluindo que o sequente $\vdash \phi \to \psi$ é válido.

   (b) Determinando que
      i. $\neg(\phi \to \psi)$ não é satisfatível e,
      ii. então, concluindo que $\vdash \phi \to \psi$ é válida.

   Utilizando tabelas de verdade e os teoremas de Correção/Completude, **decida** e **justifique** a validade dos sequentes abaixo:

   (a) (1.0 pontos) $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ através do método 2a. Discrimine, na sua resposta, os dois passos deste método.
   R/ Seguindo o método *i*) temos: $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$. Podemos, então, construir a tabela de verdade, considerando $\phi \to \psi : (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$:

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$\phi \to \psi$
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T

   Como $\phi \to \psi$ possui todas as suas avaliações T, podemos concluir que $\vDash \phi \to \psi$ é válido, isto é, $\phi \to \psi$ é uma tautologia (1). Assim, pelo Teorema da Completude, concluímos que $\vdash \phi \to \psi$ é válido (2).

   (b) (1.0 pontos) $\neg(p \to q) \vdash q \to p$ através do método 2b. Discrimine, na sua resposta, os dois passos deste método.
   R/ Seguindo o método *ii*) temos: $\vdash \neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$. Podemos, então, construir a tabela de verdade, considerando $\neg(\phi \to \psi) : \neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$q \to p$	$\neg(\phi \to \psi)$
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

   Como $\neg(\phi \to \psi)$ possui todas as suas avaliações F, podemos concluir que $\vDash \neg(\phi \to \psi)$ não é satisfatível (1). No entanto, $\phi \to \psi$ possui todas as suas avaliações T, logo $\vDash \phi \to \psi$ é válida. Assim, pelo Teorema da Completude, concluímos que $\vdash \phi \to \psi$ é válida (2).