Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Dedução no Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

18 de Abril de 2018

Duração: 110 min
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (6 pontos) O sistema de dedução natural (DN) é equivalente ao cálculo de sequentes (CS). Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, *i.e.*:

$$\boxed{\Gamma \vdash_{DN} \varphi \quad \textbf{sse} \quad \vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi}$$

A prova de equivalência citada acima aplica indução na estrutura das derivações. Assim, o sentido "$\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi$ **implica** $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$" prova-se por indução em $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi$. Por exemplo, considere o caso em que a última regra aplicada na derivação $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi$ foi o corte (intuicionista):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1\\ \Gamma \Longrightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\nabla_2\\ \psi, \Gamma \Longrightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \Longrightarrow \varphi}\ (\text{Cut})$$

Para demonstrar que existe uma derivação correspondente em DN, $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$, ao aplicar a hipótese de indução, tem-se que existem derivações ∇_1' e ∇_2' para $\Gamma \vdash_{DN} \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_{DN} \varphi$ como a seguir:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1'\\ \psi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\psi, \Gamma\\ \nabla_2'\\ \varphi\end{array}$$

Combinando estas duas derivações obtêm-se uma derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1'\\ \psi\end{array}\quad \Gamma}{}\;\begin{array}{c}\nabla_2'\\ \varphi\end{array}$$

Consideremos agora a **análise indutiva** para o caso da conjunção ($\wedge$).

(a) **(1 ponto)** Demostre que se existe uma derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \psi \wedge \chi$, que termina numa aplicação da regra ($\wedge_i$) então existe uma derivação para $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \psi \wedge \chi$.

A derivação em DN para $\Gamma \vdash_{DN} \psi \wedge \chi$ tem a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_2\\ \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi}\,(\wedge_i)$$

Por hipótese de indução aplicada às derivações ∇_1 e ∇_2, existem derivações no CS da forma:

$$\begin{array}{c}\nabla_1'\\ \Gamma \Longrightarrow \psi\end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c}\nabla_2'\\ \Gamma \Longrightarrow \chi\end{array}$$

Assim, construi-se a derivação no CS desejada como:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1'\\ \Gamma \Longrightarrow \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\nabla_2'\\ \Gamma \Longrightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Longrightarrow \psi \wedge \chi}\,(\mathrm{R}_\wedge)$$

(b) **(1 ponto)** Demostre que se existe uma derivação para $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \psi \wedge \chi$, que termina numa aplicação da regra ($\mathrm{R}_\wedge$) então existe uma derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \psi \wedge \chi$.

A derivação no CS para $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \psi \wedge \chi$ tem a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1\\ \Gamma \Longrightarrow \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\nabla_2\\ \Gamma \Longrightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Longrightarrow \psi \wedge \chi}\,(\mathrm{R}_\wedge)$$

Por hipótese de indução aplicada às derivações ∇_1 e ∇_2, existem derivações em DN da forma:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1'\\ \psi\end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_2'\\ \chi\end{array}$$

Assim, construi-se a derivação em DN desejada como:

$$\dfrac{\overset{\Gamma}{\nabla'_1} \atop \psi \qquad \overset{\Gamma}{\nabla'_2} \atop \chi}{\psi \wedge \chi}\ (\wedge_i)$$

(c) **(2 pontos)** Demostre que se existe uma derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$, que termina numa aplicação da regra $(\wedge_e)$ então existe uma derivação para $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi$.

A derivação em DN para $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$ tem a forma:

$$\dfrac{\overset{\Gamma}{\nabla} \atop \varphi \wedge \delta}{\varphi}\ (\wedge_e)$$

Por hipótese de indução aplicada à derivação ∇, existe derivação no CS da forma:

$$\overset{\nabla'}{\Gamma \Longrightarrow \varphi \wedge \delta}$$

Assim, construi-se a derivação no CS desejada como:

$$\dfrac{\overset{\nabla'}{\Gamma \Longrightarrow \varphi \wedge \delta} \qquad \dfrac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \varphi\ (\mathrm{Ax})}{\varphi \wedge \delta, \Gamma \Longrightarrow \varphi}\ (\mathrm{L}_\wedge)}{\Gamma \Longrightarrow \varphi}\ (\mathrm{Cut})$$

(d) **(2 pontos)** Demonstre que se existe uma derivação para $\vdash_{CS} \psi \wedge \chi, \Gamma \Longrightarrow \varphi$, que termina numa aplicação da regra $(\mathrm{L}_\wedge)$ (sobre a fórmula principal $\psi \wedge \chi$), então existe uma derivação para $\psi \wedge \chi, \Gamma \vdash_{DN} \varphi$.

A derivação no CS para $\vdash_{CS} \psi \wedge \chi, \Gamma \Longrightarrow \varphi$ tem a forma:

$$\dfrac{\overset{\nabla}{\phi, \Gamma \Longrightarrow \varphi}}{\phi \wedge \delta, \Gamma \Longrightarrow \varphi}\ (\mathrm{L}_\wedge)$$

Por hipótese de indução aplicada à derivação ∇, existe derivação em DN da forma:

$$\overset{\Gamma \quad [\phi]}{\underset{\varphi}{\nabla}}$$

Assim, construi-se a derivação em DN desejada como:

$$\Gamma \quad \dfrac{[\phi \wedge \delta]}{\phi}\ (\wedge_e) \atop \underset{\varphi}{\nabla}$$

Dica: nos quatro itens precedentes, **a aplicação da hipótese de indução é crucial**; por exemplo, para o item (c), tem-se que a derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$ é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi \wedge \delta\end{array}}{\varphi}\ (\wedge_e)$$

para alguma fórmula δ. Assim, por hipótese de indução, aplicada à derivação para $\Gamma \vdash_{DN} \varphi\wedge\delta$, existe uma derivação ∇' no CS da forma:

$$\begin{array}{c}\nabla'\\ \Gamma \Longrightarrow \varphi \wedge \delta\end{array}$$

Essa última derivação **deve ser utilizada** para construir a derivação desejada para $\vdash_{CS} \Gamma \Longrightarrow \varphi$.

2. (4 pontos) Um resultado interessante em teoria da prova estabelece que provabilidade construtiva ou intuicionista e provabilidade em geral ou clássica são equivalentes no seguinte sentido: *Se* $\vdash \varphi$ *na lógica proposicional clássica então* $\vdash \neg\neg\varphi$ *na lógica proposicional intuicionista.*

   (a) **(2 pontos)** Apresente uma árvore de derivação (use DN ou CS) de $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
   Solução:
   Em DN tem-se a seguinte derivação:

$$\dfrac{[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\varphi\vee\neg\varphi)}\ (\vee_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ v}{\varphi\vee\neg\varphi}\ (\vee_i)}{\dfrac{\bot}{\varphi\vee\neg\varphi}\ (\text{PBC})\ u}\ (\neg_e)$$

   No CS tem-se a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \bot \quad (\text{Ax})}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\text{R}_\to)}{\Rightarrow \varphi\vee\neg\varphi, \neg\varphi}\ (\text{R}_\vee)}{\Rightarrow \varphi\vee\neg\varphi, \varphi\vee\neg\varphi}\ (\text{R}_\vee)}{\Rightarrow \varphi\vee\neg\varphi}\ (\text{RC})$$

(b) **(2 pontos)** Apresente uma árvore de derivação no cálculo puramente intuicionista (use DN ou CS) de $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.
Nota: a prova do item precedente com pequenas mudanças aplica.

Solução:

Em DN tem-se a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ v}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\neg_i)\ u$$

No CS tem-se a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad (\mathrm{Ax})}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\vee) \qquad \bot, \varphi \Rightarrow \bot \quad (\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{L}_\rightarrow)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\rightarrow)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\vee) \qquad \bot, \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \bot \quad (\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{L}_\rightarrow)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{LC})}{\Rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\mathrm{R}_\rightarrow)$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad\qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$$

Axiomas:

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta\ \ (\text{Ax}) \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta\ \ (\text{L}_\bot)$$

Regras estruturais:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{LW}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{RW})$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{LC}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{RC})$$

Regras lógicas:

$$\frac{\varphi_{i \in \{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{L}_\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\text{R}_\wedge)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{L}_\vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\text{R}_\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{L}_\to) \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (\text{R}_\to)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{Cut})$$