Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Dedução no Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

24 de Abril de 2019

Duração: 110 min
Início: 19:00h - Término: 20:50h
Três páginas, duas questões

Nome:	Matrícula:

Usar-se-á $\vdash_M$, $\vdash_I$ e $\vdash_C$ para denotar derivações utilizando o cálculo de dedução natural minimal, intuicionista e clássico, respectivamente.

1. Sejam Γ e φ um conjunto e uma fórmula da lógica proposicional, respectivamente. Deseja-se demonstrar o teorema de Glivenko:

$$\Gamma \vdash_C \varphi \text{ implica } \Gamma \vdash_I \neg\neg\varphi$$

   (a) (3 pontos) Para ilustrar a utilidade do teorema, apresente uma prova intuicionista (pode ser também minimal) para

$$\vdash_I \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$$

$$\dfrac{[\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u \qquad \dfrac{[\phi]^v}{(\phi \vee \neg\phi)}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ v}{\phi \vee \neg\phi}\,(\vee_i)}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)}\,(\neg_i)\ u}\,(\neg_e)$$

A demonstração do teorema de Glivenko usa indução na derivação de $\Gamma \vdash_C \varphi$. Os casos considerados no passo indutivo da demonstração analizam a regra do cálculo utilizada no último passo da derivação. Assim, por exemplo, se o último passo numa derivação clássica é uma aplicação da regra $(\to_e)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1 \to \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi}\ (\to_e)$$

Então, por hipótese de indução, existem derivações para $\Gamma \vdash_I \neg\neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash_I \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)$, e se pode constroir uma derivação intuicionista como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \qquad \dfrac{[\varphi_1 \to \varphi]^x \qquad [\neg\varphi]^y}{\neg\varphi_1}\ \mathrm{MT}}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \to \varphi)}\ (\neg_i)\ x}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\ (\neg_i)\ y$$

(b) (2 pontos) Prove o caso da análise indutiva em que a derivação $\Gamma \vdash_C \varphi$ finaliza numa aplicação da regra (PBC) :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\neg\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ x$$

Ajuda: note que por hipótese de indução existe uma derivação intuicionista para $\Gamma, \neg\varphi \vdash_I \neg\neg\bot$:

$$\begin{array}{c}\Gamma\ [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{matrix} \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ y$$

(c) (2 pontos) Prove o caso da análise indutiva em que a derivação $\Gamma \vdash_C \varphi$ finaliza numa aplicação da regra $(\vee_e)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla\\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_1]^x, \Gamma\\ \nabla\\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_2]^y, \Gamma\\ \nabla\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi}\,(\vee_e)\ x, y$$

Ajuda: note que por hipótese de indução existem derivações intuicionistas para $\Gamma \vdash_I \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$; $\Gamma, \varphi_1 \vdash_I \neg\neg\varphi$ e $\Gamma, \varphi_2 \vdash_I \neg\neg\varphi$:

$$\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_1]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_2]^z\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^w \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_1]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_2]^z\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{matrix} \quad [\varphi_1 \vee \varphi_2]^x}{\neg\neg\varphi}\,(\vee_e)\ y, z}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)}\,(\neg_i)\ x}{\dfrac{\bot}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ w}\,(\neg_e)$$

2. (3 pontos) Demonstre que a Lei de Peirce $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$, é um teorema estritamente clássico; para isso apresente uma derivação de $\neg\neg\varphi \to \varphi$ que supõe a Lei de Peirce e usa unicamente regras intuicionistas.

Ajuda: suponha a seguinte instância da Lei de Peirce: $((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi$. Note também que de $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ e $\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot$ pode ser derivada intuicionistamente a premissa $((\varphi \to \bot) \to \varphi)$ dessa instância da Lei de Peirce, descarregando apenas $\varphi \to \bot$; i.e., $\neg\neg\varphi \vdash_I (\varphi \to \bot) \to \varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot]^u \qquad [\neg\varphi = \varphi \to \bot]^v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(\bot_e)}{(\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\to_i)\ v \qquad ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi \text{ (L.Peirce)}}{\varphi}\,(\to_e)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\to_i)\ u$$

Tabela 1: Cálculo de dedução natural para a lógica proposicional

$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge_e) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\,(\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,(\neg_e)$
$\dfrac{\bot}{\varphi}\,(\bot_e)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\text{PBC})\ u$