Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
2 de Dezembro de 2015
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiária de Docência: Ariane Alves Almeida

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la* Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

(a) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", demonstre que uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista) pode ser indutivamente transformada numa derivação no sistema de dedução natural:

$$\dfrac{\overset{\nabla_1}{\Gamma \Rightarrow \psi} \quad \overset{\nabla_2}{\psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (Cut)$$

Ajuda: por hipótese de indução, existem deduções naturais ∇_1' e ∇_2' para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla_1' \\ \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} [\psi]\ \ \Gamma \\ \nabla_2' \\ \varphi \end{array}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução de $\Gamma \vdash_N \varphi$.

By induction hypothesis there are natural derivations ∇_1' and ∇_2' for $\Gamma \vdash_N \psi$ and $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$. To obtain the desired natural derivation, all assumptions $[\psi]^u$ in ∇_2' are replaced by derivations of ψ using ∇_1':

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigtriangledown_1'\\ [\psi]\ \ \Gamma\\ \bigtriangledown_2'\\ \varphi\end{array}$$

(b) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", demonstre que uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo, pode ser indutivamente transformada numa derivação *à la Gentzen.*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigtriangledown_1\\ [\exists_x\psi]^v\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[x/y]]^u\ \ \Gamma\\ \bigtriangledown_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\,(\exists_e)\ u$$

Ajuda: por hipótese de indução, existem derivações à la Gentzen $\bigtriangledown_1'$ *e* $\bigtriangledown_2'$ *para* $\Gamma \Rightarrow \exists_x\psi$ *e* $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$*. Combine essas derivações utilizando* (Cut) *e* $(R_\exists)$ *para obter a prova.* *By induction hypothesis, there are derivations à la Gentzen* $\bigtriangledown_1'$ *and* $\bigtriangledown_2'$ *for the sequents* $\Gamma \Rightarrow \exists_x\psi$ *and* $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$*, respectively. The derivation is built as below. Notice that* $y \notin \texttt{fv}(\Gamma, \varphi)$ *which allows application of* $(R_\exists)$*.*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\bigtriangledown_1'\\ \Gamma \Rightarrow \exists_x\psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\bigtriangledown_2'\\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\exists_x\psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\,(R_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,(Cut)$$

2. (4 pontos) Para demonstrar a equivalência entre dedução natural e *à la Gentzen no caso clássico, um passo chave é a demonstração de c-equivalência:*

$$\vdash_G \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \textit{ se e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$$
$$\vdash_G \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \textit{ se e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi.$$

Demonstre necessidade; i.e.:

(a) (2 pontos) Se $\vdash_G \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *então* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$*;*

(b) (2 pontos) Se $\vdash_G \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *então* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$*.*

We consider the derivations below.

(a) **Necessity***:*

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\,(\mathrm{RW})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\to)$$

Sufficiency:

$$\dfrac{(\mathrm{LW})\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi} \qquad \dfrac{(Ax)\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \bot, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\ (L_\bot)}{\neg\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}_\to)}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\textsc{Cut})$$

Observe that in both cases, when Δ is the empty sequence we have an intuitionistic proof.

(b) **Necessity**:

$$\dfrac{(\mathrm{R}_\to)\ \dfrac{(\mathrm{L}_\to)\ \dfrac{(\mathrm{R}_\to)\ \dfrac{(Ax)\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi, \bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi, \neg\varphi} \qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi\ (L_\bot)}{\neg\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \neg\neg\varphi \to \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \bot}\ (\mathrm{RW})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \neg\neg\varphi}\ (\mathrm{R}_\to) \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\ (Ax)}{\neg\neg\varphi \to \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (\mathrm{L}_\to)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (\textsc{Cut})$$

Observe that this case is strictly calssic because the left premisse of (Cut) is essentially a proof of the sequent $\Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Sufficiency:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}_\to)$$

Observe that in this case, when Δ is the empty sequence we have an intuitionistic proof.

3. *(2 pontos) A semântica lógica do comando de especificação* `IF-THEN-ELSE` *no sistema PVS, em particular, está expressa nas seguintes inferências obtidas por aplicação do comando* (PROP) *(que aplica repetidamente transormações proposicionais via commandos* (FLATTEN) *e/ou* (SPLIT)*):*

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\ (\textsc{prop})$$

$$\dfrac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}}\ (\textsc{prop})$$

Qual o resultado de aplicar (PROP) *a um sequente da forma*

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF (A OR B) THEN (C AND D) ELSE E ENDIF}$$

Responda especificamente:

(a) *(0.5 pontos) Quantos sub-casos, i.e., sequentes a demonstrar, são gerados?*

(b) (1.5 pontos) Quais são esses sub-casos?

São gerados cinco casos:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF (A OR B) THEN (C AND D) ELSE E ENDIF}}{\Gamma, \texttt{A} \Rightarrow \Delta, \texttt{C} \qquad \Gamma, \texttt{A} \Rightarrow \Delta, \texttt{D} \qquad \Gamma, \texttt{B} \Rightarrow \Delta, \texttt{C} \qquad \Gamma, \texttt{B} \Rightarrow \Delta, \texttt{D} \qquad \Gamma, \Rightarrow \Delta, \texttt{A, B, E}} \; (\textsc{prop})$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x\varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x\varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x\varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x\varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi\{x/x_0\}]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2} \ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi} \ (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi} \ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \ (Cut)$$