Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
29 de Junho de 2016
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiário de Docência: Thiago Mendonça Ferreira Ramos

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la* Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

(a) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1 \\ \Gamma \Rightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\nabla_2 \\ \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \text{ (Cut)}$$

Demonstre então que existe uma derivação correspondente no sistema de dedução natural. Para isso suponha por hipótese de indução, que existem deduções naturais ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como abaixo:

$$\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla'_1 \\ \psi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}[\psi] \quad \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi\end{array}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução de $\Gamma \vdash_N \varphi$.

By induction hypothesis there are natural derivations ∇'_1 and ∇'_2 for $\Gamma \vdash_N \psi$ and $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$. To obtain the desired natural derivation, all assumptions $[\psi]^u$ in ∇'_2 are replaced by derivations of ψ using ∇'_1:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ [\psi] \;\; \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

(b) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla_1 \\ [\exists_x \psi]^v \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi[x/y]]^u \;\; \Gamma \\ \nabla_2 \\ \varphi \end{array}}{\varphi}\ (\exists_e)\ u$$

Demonstre que existe uma derivação *à la Gentzen para* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Neste caso, por hipótese de indução, pode ser assumido que existem derivações à la Gentzen ∇'_1 *e* ∇'_2 *para* $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ *e* $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$. *Combine essas derivações utilizando* (Cut) *e* $(R_\exists)$ *para obter a prova.*

By induction hypothesis, there are derivations à la Gentzen ∇'_1 *and* ∇'_2 *for the sequents* $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ *and* $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$, *respectively. The derivation is built as below. Notice that* $y \notin \texttt{fv}(\Gamma, \varphi)$ *which allows application of* $(R_\exists)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \exists_x \psi \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \nabla'_2 \\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}}{\exists_x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{R}_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{Cut})$$

2. (4 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de Gentzen o seguinte:

$$\exists x\, \phi \vdash_N \neg \forall x \neg \phi \qquad\qquad \neg \forall x \neg \phi \vdash_N \exists x\, \phi$$

$$\vdash_G \exists x\, \phi \Rightarrow \neg \forall x \neg \phi \qquad\qquad \vdash_G \neg \forall x \neg \phi \Rightarrow \exists x\, \phi$$

(a) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\neg \forall x \neg \phi \vdash_N \exists x\, \phi$ ou $\vdash_G \neg \forall x \neg \phi \Rightarrow \exists x\, \phi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\exists x\,\phi]^u$}
\AxiomC{$[\phi(a)]^v$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists x\,\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) v}
\UnaryInfC{$\neg\phi(a)$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall x\,\neg\phi$}
\AxiomC{$\neg\forall x\,\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) u}
\UnaryInfC{$\exists x\,\phi$}
\end{prooftree}
$$

ou

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\phi[x/t] \Rightarrow \phi[x/t],\, \bot \quad \text{(Ax)}$}
\RightLabel{$(\mathrm{R}_{\rightarrow})$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \phi[x/t], \neg\phi[x/t]$}
\RightLabel{$(\mathrm{R}_{\exists})$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x\,\phi,\, \neg\phi[x/t]$}
\RightLabel{$(\mathrm{R}_{\forall})$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi$}
\AxiomC{$\bot \Rightarrow \exists x\,\phi$}
\RightLabel{$(\mathrm{L}_{\rightarrow})$}
\BinaryInfC{$\neg\forall x\,\neg\phi \Rightarrow \exists x\,\phi$}
\end{prooftree}
$$

(b) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\exists x\,\phi \vdash_N \neg\forall x\,\neg\phi$ ou $\vdash_G \exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\,\phi$}
\AxiomC{$[\phi(a)]^u$}
\AxiomC{$[\forall x\,\neg\phi]^v$}
\RightLabel{$(\forall_e)$}
\UnaryInfC{$\neg\phi(a)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\exists_e)$ u}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$ v}
\UnaryInfC{$\neg\forall x\,\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

ou

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\text{(Ax)} \quad \phi[x/t] \Rightarrow \bot, \phi[x/t]$}
\AxiomC{$\bot, \phi[x/t] \Rightarrow \bot \quad (\mathrm{L}_{\bot})$}
\RightLabel{$(\mathrm{L}_{\rightarrow})$}
\BinaryInfC{$\phi[x/t], \neg\phi[x/t] \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$(\mathrm{L}_{\forall})$}
\UnaryInfC{$\phi[x/t], \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$(\mathrm{L}_{\exists})$}
\UnaryInfC{$\exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$(\mathrm{R}_{\rightarrow})$}
\UnaryInfC{$\exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

3. (2 pontos) A semântica lógica do comando de especificação `IF-THEN-ELSE` no sistema PVS, em particular, está expressa nas seguintes inferências obtidas por aplicação do comando (PROP) (que aplica repetidamente transformações proposicionais via commandos (FLATTEN) e/ou (SPLIT)):

$$
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\ (\textsc{prop})
$$

$$
\frac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}}\ (\textsc{prop})
$$

Qual o resultado de aplicar (PROP) a um sequente da forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF (A AND B) THEN (C OR D) ELSE E ENDIF}$$

Responda especificamente:

(a) (0.5 pontos) Quantos sub-casos, i.e., sequentes a demonstrar, são gerados?

(b) (1.5 pontos) Quais são esses sub-casos?

São gerados três casos:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF (A AND B) THEN (C OR D) ELSE E ENDIF}}{\Gamma, \texttt{A}, \texttt{B} \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{D} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{A}, \texttt{E} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{B}, \texttt{E}} \; (\textsc{prop})$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x\varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x\varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x\varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x\varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi\{x/x_0\}]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i \in \{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\rightarrow)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}\ (R_\rightarrow)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$