Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
02 de Julho de 2014
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiário de Docência: José Luis Soncco Álvarez
Monitor: Thiago Mendonça Ferreira Ramos

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:00; Fim: 17:40; Quatro páginas, Duas questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.*

1. *(6 pontos) Demonstre por dedução natural e à la Gentzen, supondo que não existem ocorrências das variáveis x e y em ϕ e ψ, respectivamente ($x \notin \psi$ e $y \notin \phi$), que*

   (a) *(1.5 pontos)* $(\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \vdash_N \forall x\forall y(\phi \to \psi)$;

   (b) *(1.5 pontos)* $\vdash_G (\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \Rightarrow \forall x\forall y(\phi \to \psi)$;

   (c) *(1.5 pontos)* $\forall x\forall y(\phi \to \psi) \vdash_N (\exists x\phi) \to (\forall y\psi)$ *e*

   (d) *(1.5 pontos)* $\vdash_G \forall x\forall y(\phi \to \psi) \Rightarrow (\exists x\phi) \to (\forall y\psi)$.

   Deve constroir árvores de dedução natural, indicando em cada passo a regra de inferência aplicada. Observar uma prova de $\forall x(\phi \to \psi) \vdash_N (\exists x\phi) \to \psi$, onde x não occorre em ψ, pode ser de utilidade:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\phi]^u \qquad \dfrac{[\phi[x/x_0]]^v \qquad \dfrac{\forall x(\phi \to \psi)}{\phi[x/x_0] \to \psi}\,(\forall e)}{\psi}\,(\to e)}{\psi}\,(\exists e)\, v}{(\exists x\phi) \to \psi}\,(\to i)\, u$$

Solução:

(a) $(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)\vdash_N \forall x\forall y(\phi\to\psi)$*:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi[x/x_0]]^u}{\exists x\phi}\,(\exists i) \qquad (\exists x\phi)\to(\forall y\psi)}{\forall y\psi}\,(\to e)}{\psi[y/y_0]}\,(\forall e)}{\phi[x/x_0]\to\psi[y/y_0]}\,(\to i)\,u}{\forall y(\phi[x/x_0]\to\psi)}\,(\forall i)}{\forall x\forall y(\phi\to\psi)}\,(\forall i)$$

(b) $\vdash_G (\exists x\phi)\to(\forall y\psi)\Rightarrow\forall x\forall y(\phi\to\psi)$*:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(R_\exists)\,\dfrac{(Ax)\;\;\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0],\phi[x_0]}{\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0],\exists x\phi} \qquad \dfrac{\psi[y_0],\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]\;\;(Ax)}{\forall y\psi,\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\forall)}{(\exists x\phi)\to(\forall y\psi),\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\to)}{(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)\Rightarrow(\phi[x_0]\to\psi[y_0])}\,(R_\to)}{(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)\Rightarrow\forall y(\phi[x_0]\to\psi)}\,(R_\forall)}{(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)\Rightarrow\forall x\forall y(\phi\to\psi)}\,(R_\forall)$$

(c) $\forall x\forall y(\phi\to\psi)\vdash_N (\exists x\phi)\to(\forall y\psi)$*:*

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\phi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi[x/x_0]]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(\phi\to\psi)}{\forall y(\phi[x/x_0]\to\psi)}\,(\forall e)}{\phi[x/x_0]\to\psi[y/y_0]}\,(\forall e)}{\psi[y/y_0]}\,(\to e)}{\forall y\psi}\,(\forall i)}{\forall y\psi}\,(\exists e)\,v}{(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)}\,(\to i)\,u$$

(d) $\vdash_G \forall x\forall y(\phi\to\psi)\Rightarrow(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)$*:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax)\;\;\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0],\phi[x_0] \qquad \psi[y_0],\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]\;\;(Ax)}{\phi[x_0]\to\psi[y_0],\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\to)}{\forall y(\phi[x_0]\to\psi),\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\forall)}{\forall x\forall y(\phi\to\psi),\phi[x_0]\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\forall)}{\forall x\forall y(\phi\to\psi),\exists x\phi\Rightarrow\psi[y_0]}\,(L_\exists)}{\forall x\forall y(\phi\to\psi),\exists x\phi\Rightarrow\forall y\psi}\,(R_\forall)}{\forall x\forall y(\phi\to\psi)\Rightarrow(\exists x\phi)\to(\forall y\psi)}\,(R_\to)$$

2. *(4 pontos)*

(a) *(2 pontos) Marque com "×" na seguinte tabela a relação entre comandos de demonstração do assistente PVS, utilizado no projeto da disciplina, e as regras dedutivas do cálculo de Gentzen para a lógica clássica.*

	(FLATTEN)	(SPLIT)	(INST)	(SKOLEM)
$(L_\wedge)$	×			
$(R_\wedge)$		×		
$(L_\vee)$		×		
$(R_\vee)$	×			
$(L_\rightarrow)$		×		
$(R_\rightarrow)$	×			
$(L_\exists)$				×
$(R_\exists)$			×	
$(L_\forall)$			×	
$(R_\forall)$				×

(b) *(2 pontos) Qual é a semântica lógica do comando de especificação* `IF-THEN-ELSE` *no sistema PVS? Em particular, explique o que aconteçe ao aplicarmos o comando* (PROP) *(que aplica repetidamente transormações proposicionais via commandos* (FLATTEN) *e/ou* (SPLIT)*) em sequentes da forma:*

i. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}$ *e*

ii. $\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

i.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\ (\text{PROP})$$

ii.

$$\frac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}}\ (\text{PROP})$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi\{x/x_0\}]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \;\; (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \;\; (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\; (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\; (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\; (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\; (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\; (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\; (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\; (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\; (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\; (Cut)$$