

Prova Automática de Teoremas para Lógicas Modais

Cláudia Nalon

<http://www.cic.unb.br/~nalon>

`nalon@{cic.unb.br, unb.br}`

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

Motivação – I

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● **Motivação – I**

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Linguagens lógicas estão intrinsicamente ligadas ao conceito de computação (e.g. circuitos implementando um computador digital podem ser descritos através de linguagem proposicional).

Motivação – I

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● **Motivação – I**

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Linguagens lógicas estão intrinsicamente ligadas ao conceito de computação (e.g. circuitos implementando um computador digital podem ser descritos através de linguagem proposicional).
- A utilização de linguagens lógicas para descrever problemas computacionais data da época em que os primeiros computadores digitais foram construídos.

Motivação – I

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● **Motivação – I**

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Linguagens lógicas estão intrinsicamente ligadas ao conceito de computação (e.g. circuitos implementando um computador digital podem ser descritos através de linguagem proposicional).
- A utilização de linguagens lógicas para descrever problemas computacionais data da época em que os primeiros computadores digitais foram construídos.
- Datam da mesma época também, os esforços para se implementar provadores automáticos de teoremas.

Motivação – II

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● **Motivação – II**

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Desenvolvimentos teóricos, datando desta mesma época, fizeram com que as linguagens modais deixassem o contexto da discussão filosófica e fossem adotadas na descrição de problemas matemáticos e computacionais.

Motivação – II

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Desenvolvimentos teóricos, datando desta mesma época, fizeram com que as linguagens modais deixassem o contexto da discussão filosófica e fossem adotadas na descrição de problemas matemáticos e computacionais.
- Linguagens modais expressam tais problemas de modo natural, através, por exemplo, do uso das noções de necessidade, conhecimento, crença e tempo.

Motivação – II

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● **Motivação – II**

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Desenvolvimentos teóricos, datando desta mesma época, fizeram com que as linguagens modais deixassem o contexto da discussão filosófica e fossem adotadas na descrição de problemas matemáticos e computacionais.
- Linguagens modais expressam tais problemas de modo natural, através, por exemplo, do uso das noções de necessidade, conhecimento, crença e tempo.
- Linguagens modais possuem **boas** características, ou seja, os problemas de decisão relativos a tais linguagens são computacionalmente tratáveis.

Motivação – III

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Mais recentemente, **combinações** de lógicas modais têm recebido a atenção da comunidade científica.

Motivação – III

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Mais recentemente, **combinações** de lógicas modais têm recebido a atenção da comunidade científica.
- Cada uma das lógicas componentes expressa de modo natural uma ou mais características do problema a ser tratado.

Motivação – III

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Mais recentemente, **combinações** de lógicas modais têm recebido a atenção da comunidade científica.
- Cada uma das lógicas componentes expressa de modo natural uma ou mais características do problema a ser tratado.
- Combinações, entretanto, nem sempre se comportam (do ponto de vista de complexidade) do mesmo modo que as lógicas consideradas separadamente.

Motivação – III

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Mais recentemente, **combinações** de lógicas modais têm recebido a atenção da comunidade científica.
- Cada uma das lógicas componentes expressa de modo natural uma ou mais características do problema a ser tratado.
- Combinações, entretanto, nem sempre se comportam (do ponto de vista de complexidade) do mesmo modo que as lógicas consideradas separadamente.
- Nós consideraremos métodos de prova para combinações de lógicas modais proposicionais que preservam a **independência** de suas componentes.

Roteiro

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

● Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

1. Lógica Proposicional;

2. Lógicas Modais Proposicionais:

(a) Lógicas Epistêmicas;

(b) Lógicas Temporais;

3. Lógicas Temporais de Conhecimento

Introdução e Sintaxe

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● **Introdução e Sintaxe**

● Semântica

● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- A mais simples das lógicas;
- Proposições – fatos – são representados através de símbolos proposicionais;
- Sentenças complexas são construídas a partir destes símbolos e de conectivos:

◆ *Símbolos Proposicionais:* $\mathcal{P} = \{p, q, r, p', q', r', \dots\}$;

◆ *Constantes:* true, false;

◆ *Operadores Clássicos:*

$\neg\varphi$	(negação),
$(\varphi \wedge \phi)$	(conjunção),
$(\varphi \vee \phi)$	(disjunção),
$(\varphi \rightarrow \phi)$	(implicação),
$(\varphi \Leftrightarrow \phi)$	(dupla implicação).

Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Uma **valoração** é uma função π_0 a qual atribui um *valor de verdade* a cada um dos símbolos proposicionais:

$$\pi_0 : \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$$

Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Uma **valoração** é uma função π_0 a qual atribui um *valor de verdade* a cada um dos símbolos proposicionais:

$$\pi_0 : \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$$

- A função de valoração é estendida para lidar com fórmulas complexas, e.g.:

$$\pi(\neg\varphi) = true \text{ se, e somente se, } \pi_0(\varphi) = false$$

$$\pi(\varphi \wedge \psi) = true \text{ se, e somente se, } \pi_0(\varphi) = true \text{ e } \pi_0(\psi) = true$$

Propriedades Semânticas

- Uma valoração π **satisfaz** uma fórmula φ se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$.

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● **Propriedades Semânticas**

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Propriedades Semânticas

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● **Propriedades Semânticas**

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Uma valoração π **satisfaz** uma fórmula φ se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$.
- Uma fórmula φ é **válida** se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$ para toda valoração π .

Propriedades Semânticas

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● **Propriedades Semânticas**

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Uma valoração π **satisfaz** uma fórmula φ se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$.
- Uma fórmula φ é **válida** se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$ para toda valoração π .
- Uma fórmula φ é uma **contradição** se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{false}$ para toda valoração π .

Propriedades Semânticas

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● **Propriedades Semânticas**

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo

● Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Uma valoração π **satisfaz** uma fórmula φ se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$.
- Uma fórmula φ é **válida** se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{true}$ para toda valoração π .
- Uma fórmula φ é uma **contradição** se, e somente se, $\pi(\varphi) = \text{false}$ para toda valoração π .
- $\Gamma \models \varphi$: φ é consequência lógica de Γ .
 $\models \varphi$ abrevia $\emptyset \models \varphi$: φ é válida.

Métodos de Prova – I

- Provas em Sistemas Modais

- Motivação

- Overview

- Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

- Lógica Temporal

- Lógica de Conhecimento

- Conhecimento e Tempo

- Conclusões

- Um **cálculo** para uma determinada linguagem lógica consiste de um conjunto de **axiomas** e um conjunto de **regras de inferência**.

Métodos de Prova – I

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Um **cálculo** para uma determinada linguagem lógica consiste de um conjunto de **axiomas** e um conjunto de **regras de inferência**.
- A **prova de φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ** é uma seqüência de fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onde $\varphi_n = \varphi$ e cada φ_i é
 - ◆ um axioma;
 - ◆ um membro de Γ ; ou
 - ◆ foi obtido a partir da aplicação das regras de inferência às fórmulas anteriores na seqüência.

Métodos de Prova – I

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Um **cálculo** para uma determinada linguagem lógica consiste de um conjunto de **axiomas** e um conjunto de **regras de inferência**.
- A **prova de φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ** é uma seqüência de fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onde $\varphi_n = \varphi$ e cada φ_i é
 - ◆ um axioma;
 - ◆ um membro de Γ ; ou
 - ◆ foi obtido a partir da aplicação das regras de inferência às fórmulas anteriores na seqüência.
- $\Gamma \vdash \varphi$: existe uma prova de φ a partir de Γ ;
 $\vdash \varphi$ abrevia $\emptyset \vdash \varphi$: φ é um **teorema**.

Relação entre Semântica e Prova

- Um cálculo é **consistente** se todo teorema é uma fórmula válida.

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Relação entre Semântica e Prova

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Um cálculo é **consistente** se todo teorema é uma fórmula válida.

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

- Um cálculo é **completo** se toda fórmula válida é um teorema.

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

Relação entre Semântica e Prova

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Um cálculo é **consistente** se todo teorema é uma fórmula válida.

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

- Um cálculo é **completo** se toda fórmula válida é um teorema.

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

- Uma lógica é **decidível** se existe um *procedimento*, cuja *terminação* seja garantida, que *determine* se uma determinada fórmula é um teorema ou não.

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[MRES1]} \quad (D \quad \vee \quad m_i) \\ \quad \quad \quad (D' \quad \vee \quad \neg m_i) \\ \hline \quad \quad \quad (D \quad \vee \quad D') \end{array}$$

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

● Resolução

- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\text{[MRES1]} \quad \frac{\begin{array}{l} (D \quad \vee \quad m_i) \\ (D' \quad \vee \quad \neg m_i) \end{array}}{(D \quad \vee \quad D')}$$

- Fórmulas são primeiramente transformadas em uma *forma normal*.

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge (l_{n+1} \vee \dots \vee l_m) \wedge \dots \wedge (l_r \vee \dots \vee l_s)$$

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

● Resolução

- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\text{[MRES1]} \quad \frac{(D \vee m_i) \quad (D' \vee \neg m_i)}{(D \vee D')}$$

- Fórmulas são primeiramente transformadas em uma *forma normal*.

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge (l_{n+1} \vee \dots \vee l_m) \wedge \dots \wedge (l_r \vee \dots \vee l_s)$$

- **Literal:** p ou $\neg p$, onde p é um símbolo proposicional.

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

● Resolução

- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\text{[MRES1]} \quad \frac{(D \vee m_i) \quad (D' \vee \neg m_i)}{(D \vee D')}$$

- Fórmulas são primeiramente transformadas em uma *forma normal*.

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge (l_{n+1} \vee \dots \vee l_m) \wedge \dots \wedge (l_r \vee \dots \vee l_s)$$

- **Literal:** p ou $\neg p$, onde p é um símbolo proposicional.
- Disjunções de literais são chamadas de **cláusulas**.

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

● Resolução

- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\text{[MRES1]} \quad \frac{\begin{array}{l} (D \quad \vee \quad m_i) \\ (D' \quad \vee \quad \neg m_i) \end{array}}{(D \quad \vee \quad D')}$$

- Fórmulas são primeiramente transformadas em uma *forma normal*.

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge (l_{n+1} \vee \dots \vee l_m) \wedge \dots \wedge (l_r \vee \dots \vee l_s)$$

- **Literal:** p ou $\neg p$, onde p é um símbolo proposicional.
- Disjunções de literais são chamadas de **cláusulas**.

Forma Normal Conjuntiva

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- **CNF**
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

1. $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \Leftrightarrow \psi$ são substituídos por $(\neg\varphi \vee \psi)$ e $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$

2. negações são reescritas (De Morgan's):

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \longrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

3. duplas negações são eliminadas, i.e. $\neg\neg\varphi \longrightarrow \varphi$

4. leis distributivas são aplicadas:

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \longrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \longrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

● Exemplo

- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

● Exemplo

- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$

2. $\neg q \vee r$

3. p

4. $\neg r$

5. $\neg q$ [4, 2, RES]

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$
5. $\neg q$ [4, 2, RES]

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$
5. $\neg q$ [4, 2, RES]
6. $\neg p$ [5, 1, RES]

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo
- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \quad \vee \quad q$
2. $\neg q \quad \vee \quad r$
3. p
4. $\neg r$
5. $\neg q$ [4, 2, RES]
6. $\neg p$ [5, 1, RES]

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

● Exemplo

- Lógicas Modais

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash \{p \rightarrow r\}$$

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q \vee r$
3. p
4. $\neg r$
5. $\neg q$ [4, 2, RES]
6. $\neg p$ [5, 1, RES]
7. **false** [6, 3, RES]

Lógicas Modais

Introdução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Úteis na especificação e verificação de hardware e de programas, sistemas concorrentes e distribuídos, bases de dados temporais, planejamento, sistemas multi-agentes.

Introdução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Úteis na especificação e verificação de hardware e de programas, sistemas concorrentes e distribuídos, bases de dados temporais, planejamento, sistemas multi-agentes.
 - ◆ Um flip-flop nunca atinge um estado instável;
 - ◆ Um determinado programa eventualmente termina;
 - ◆ *Invariância*: uma determinada propriedade \mathcal{P} se preserva a partir de um determinado momento;
 - ◆ *Fairness*: Um determinado recurso será sempre acessível;
 - ◆ Nunca dois processos atingem seu ponto crítico num mesmo instante.

Sintaxe

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- ◆ *Símbolos Proposicionais:* $\mathcal{P} = \{p, q, r, p', q', r', \dots\}$;
- ◆ *Constantes:* true, false;
- ◆ *Operadores Clássicos:* $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \phi)$, $(\varphi \vee \phi)$, $(\varphi \rightarrow \phi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \phi)$;
- ◆ *Operadores Temporais:* $\diamond\varphi$, $\square\varphi$, $\bigcirc\varphi$, $(\varphi \mathcal{U} \phi)$, $(\varphi \mathcal{W} \phi)$;

Semântica

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Semântica

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Semântica

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

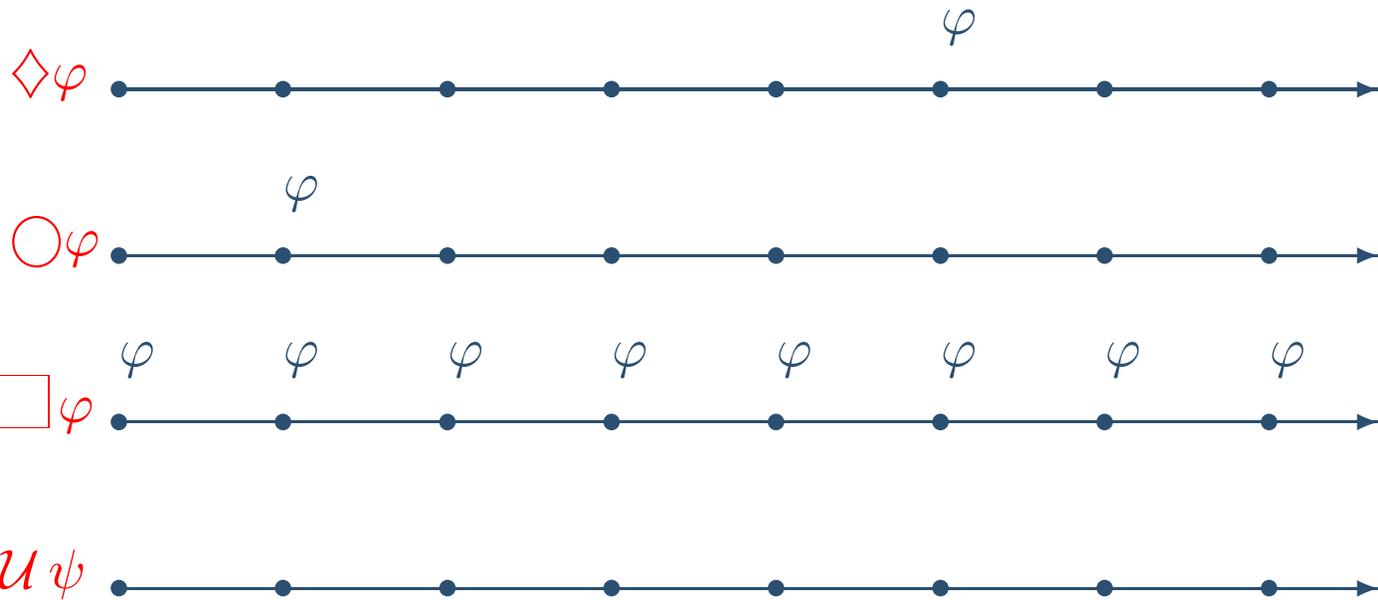
Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Semântica

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

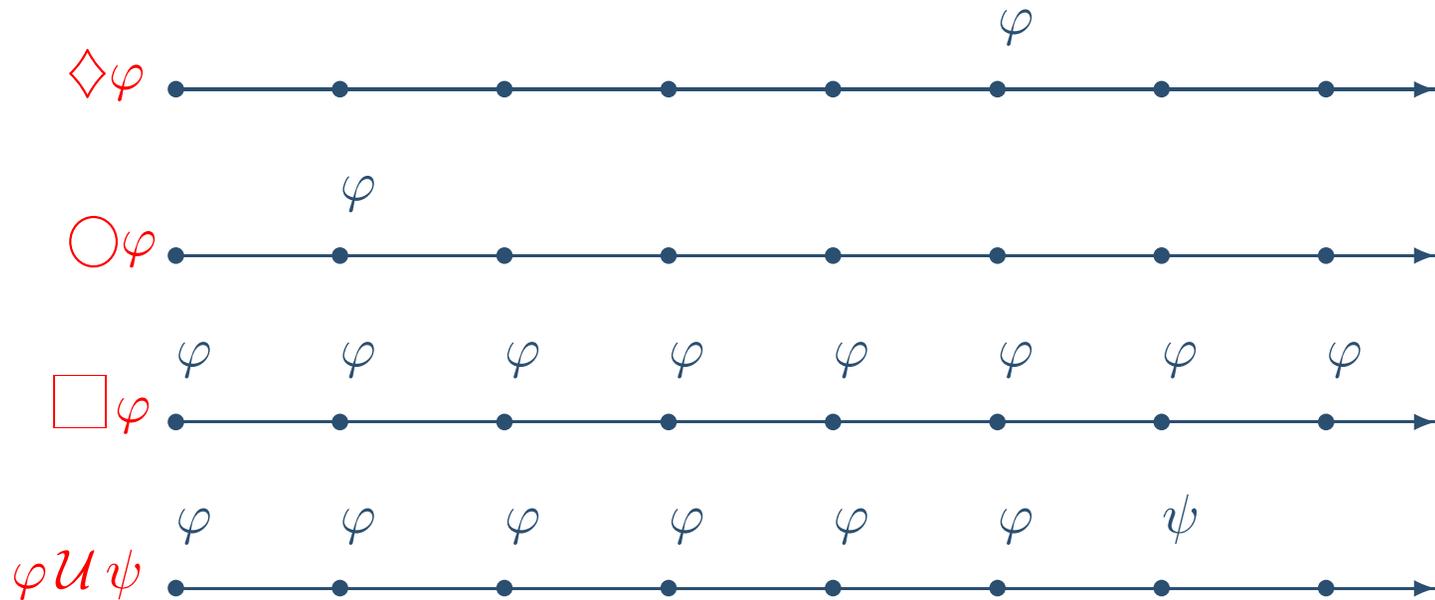
● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

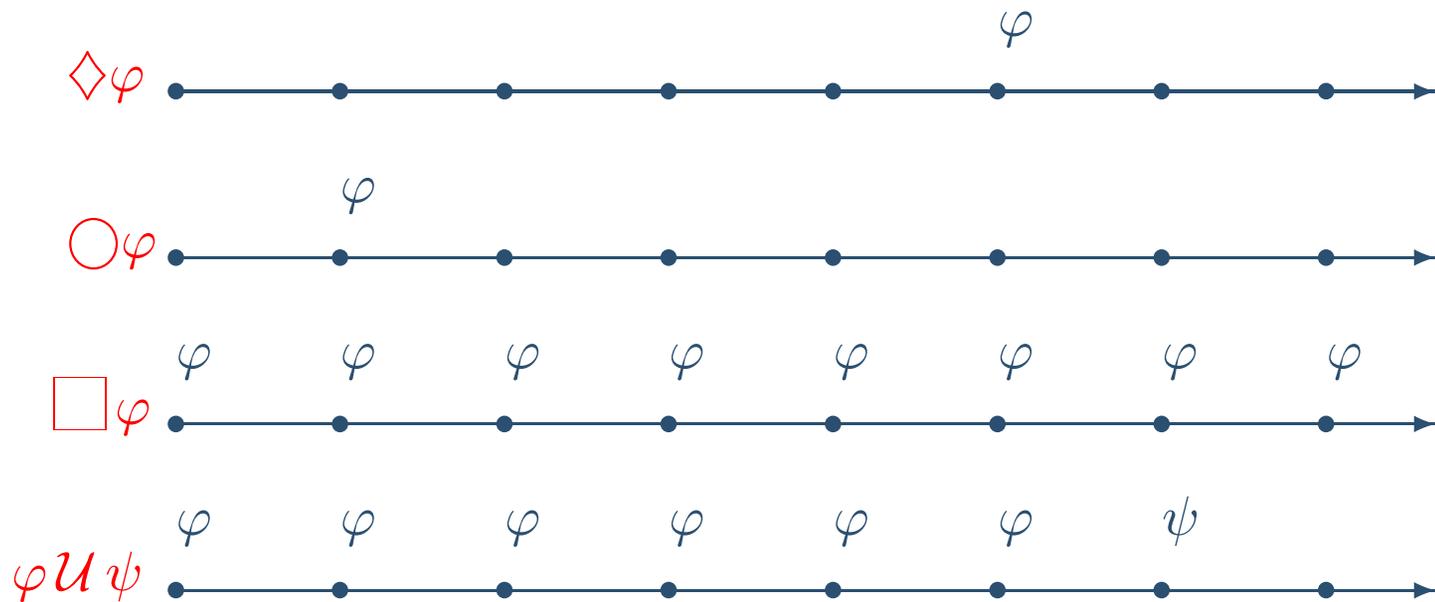
● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Modelos são retas infinitas, onde cada ponto representa um momento no tempo: tempo é discreto



$$\varphi \mathcal{W} \psi \Leftrightarrow (\varphi \mathcal{U} \psi) \vee \square \varphi$$

Sentenças Temporais

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● **Sentenças Temporais**

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

■ ◇ terminate_program

Sentenças Temporais

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● **Sentenças Temporais**

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

■ ◇ terminate_program

■ □ ◇ resource

Sentenças Temporais

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● **Sentenças Temporais**

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

■ \diamond terminate_program

■ $\square \diamond$ resource

■ walking \mathcal{U} (reaches_target \vee ends_fuel)

Sentenças Temporais

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● **Sentenças Temporais**

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

■ \diamond terminate_program

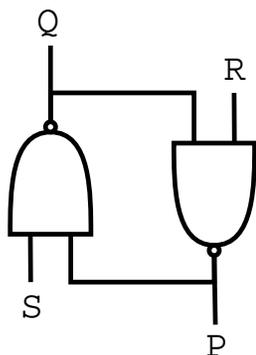
■ $\square \diamond$ resource

■ walking \mathcal{U} (reaches_target \vee ends_fuel)

a. $\square (q \Leftrightarrow \neg(p \wedge s))$

■ b. $\square (p \Leftrightarrow \neg(q \wedge r))$

c. $\square (s \vee r)$



Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Método clausal: a negação da fórmula que se deseja provar válida é primeiro transformada em uma forma normal (**Separated Normal Form**).

Resolução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Método clausal: a negação da fórmula que se deseja provar válida é primeiro transformada em uma forma normal (**Separated Normal Form**).

Inicial

$$\text{start} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

Próximo

$$\bigwedge_{a=1}^g k_a \rightarrow \bigcirc \bigvee_{b=1}^r l_b$$

Eventuais

$$\bigwedge_{a=1}^g k_a \rightarrow \diamond l$$

Literais

$$\text{true} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

Regras de Inferência

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução

● Regras de Inferência

- TRES
- Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[IRES1]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee l) \\ \text{start} \rightarrow (D' \vee \neg l) \\ \hline \text{start} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[IRES2]} \quad \text{start} \rightarrow (D \vee l) \\ \text{start} \rightarrow (D' \vee \neg l) \\ \hline \text{start} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

Regras de Inferência

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução

● Regras de Inferência

- TRES
- Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[SRES1]} \quad C \rightarrow \bigcirc(D \vee l) \\ \quad \quad \quad C' \rightarrow \bigcirc(D' \vee \neg l) \\ \hline (C \wedge C') \rightarrow \bigcirc(D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[SRES2]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee l) \\ \quad \quad \quad C \rightarrow \bigcirc(D' \vee \neg l) \\ \hline C \rightarrow \bigcirc(D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[SIMP1]} \quad C \rightarrow \bigcirc \text{false} \\ \hline \text{true} \rightarrow \neg C \end{array}$$

Resolução Temporal

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução
- Regras de Inferência
- TRES
- Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[TRES1]} \quad A \rightarrow \bigcirc \square \neg l \\ \quad \quad \quad C \rightarrow \diamond l \\ \hline \quad \quad \quad C \rightarrow (\neg A) \mathcal{W} l \end{array}$$

Resolução Temporal

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Sentenças Temporais

● Resolução

● Regras de Inferência

● TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[TRES1]} \quad A \rightarrow \bigcirc \square \neg l \\ \quad \quad \quad C \rightarrow \diamond l \\ \hline C \rightarrow (\neg A) \mathcal{W} l \end{array}$$

C

l



Resolução Temporal

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

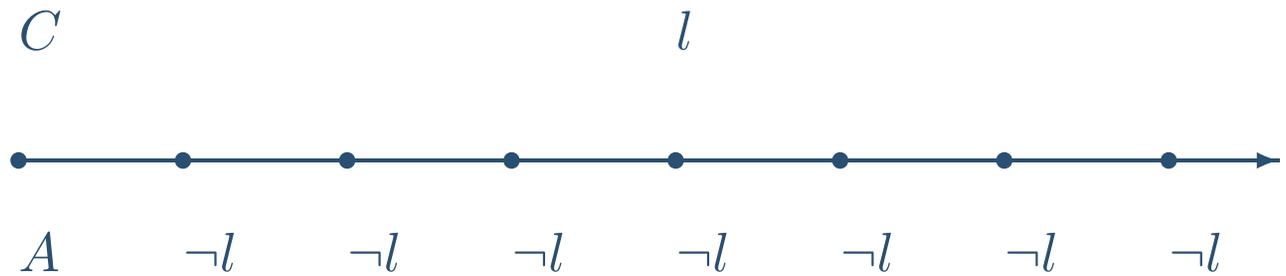
- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução
- Regras de Inferência
- TRES
- Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[TRES1]} \quad A \rightarrow \bigcirc \square \neg l \\ C \rightarrow \diamond l \\ \hline C \rightarrow (\neg A) \mathcal{W} l \end{array}$$



Resolução Temporal

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

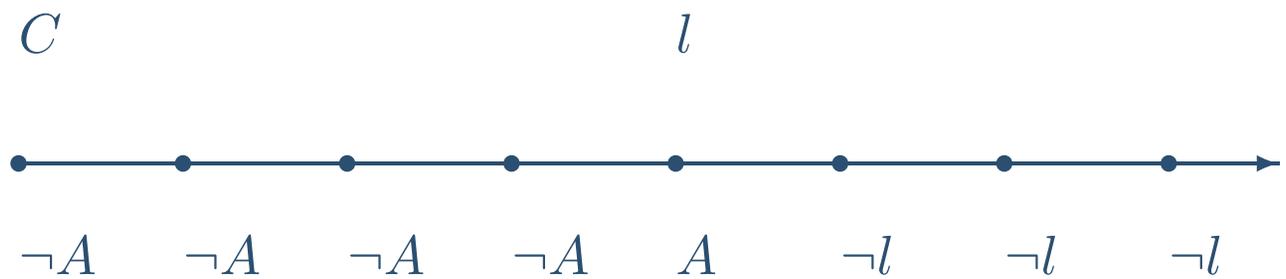
- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução
- Regras de Inferência
- TRES
- Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[TRES1]} \quad A \rightarrow \bigcirc \square \neg l \\ C \rightarrow \diamond l \\ \hline C \rightarrow (\neg A) \mathcal{W} l \end{array}$$



Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Sentenças Temporais
- Resolução
- Regras de Inferência
- TRES

● Exemplo

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$(\diamond\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \bigcirc\diamond\varphi$$

- | | | | | | | | | |
|----|--------------|---------------|---------------------------|-----|--------------|---------------|--|------------|
| 1. | start | \rightarrow | x | 9. | x | \rightarrow | $\bigcirc\neg\varphi$ | [4, 5, S |
| 2. | x | \rightarrow | $\diamond\varphi$ | 10. | x | \rightarrow | $\bigcirc t$ | [4, 6, S |
| 3. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg\varphi$ | 11. | t | \rightarrow | $\bigcirc(t \wedge \neg\varphi)$ | [7, 8, S |
| 4. | x | \rightarrow | $\bigcirc y$ | 12. | x | \rightarrow | $\bigcirc(t \wedge \neg\varphi)$ | [9, 10, S |
| 5. | true | \rightarrow | $\neg y \vee \neg\varphi$ | 13. | x | \rightarrow | $(\neg x \wedge \neg t) \mathcal{W} \varphi$ | [11, 12, S |
| 6. | true | \rightarrow | $\neg y \vee t$ | 14. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \varphi$ | [13, SN |
| 7. | t | \rightarrow | $\bigcirc\neg\varphi$ | 15. | true | \rightarrow | $\neg x$ | [14, 3, S |
| 8. | t | \rightarrow | $\bigcirc t$ | 16. | start | \rightarrow | false | [15, 1, S |

Introdução

- Úteis na especificação de sistemas multi-agentes, sistemas distribuídos, protocolos, bases de conhecimento, etc.

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Introdução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Úteis na especificação de sistemas multi-agentes, sistemas distribuídos, protocolos, bases de conhecimento, etc.
- Introduce uma nova modalidade para cada agente: $K_i \varphi$.

Introdução

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

- Úteis na especificação de sistemas multi-agentes, sistemas distribuídos, protocolos, bases de conhecimento, etc.
- Introduce uma nova modalidade para cada agente: $K_i \varphi$.

K_{Alice} segredo

$K_{Alice} K_{Charlie}$ chave

$K_{Alice} K_{Charlie} (\text{chave} \wedge \text{send}(Alice, Charlie, msg) \rightarrow K_{Charlie} \text{segredo})$

$\text{send}(Alice, Charlie, msg) \rightarrow K_{Alice} K_{Charlie} \text{segredo}$

$K_{Alice} K_{Bob} \neg \text{chave} \rightarrow K_{Alice} K_{Bob} \neg \text{segredo}$

Sintaxe

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Axiomatização: $KL_{(n)} = K, T, D, 4, 5.$

K:	$\vdash K_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i \varphi \rightarrow K_i \psi)$
T:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow \varphi$
D:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow \neg K_i \neg \varphi$
4:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow K_i K_i \varphi$
5:	$\vdash \neg K_i \neg \varphi \rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi$

Sintaxe:

- *Símbolos Proposicionais:* $\mathcal{P} = \{p, q, r, p', q', r', \dots\}$;
- *Constantes:* true, false;
- *Operadores Clássicos:* $\neg \varphi, (\varphi \wedge \phi), (\varphi \vee \phi), (\varphi \rightarrow \phi), (\varphi \Leftrightarrow \phi)$;
- *Operadores Modais:* $K_i \varphi, \forall i \in \mathcal{A}$, where $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$.

Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

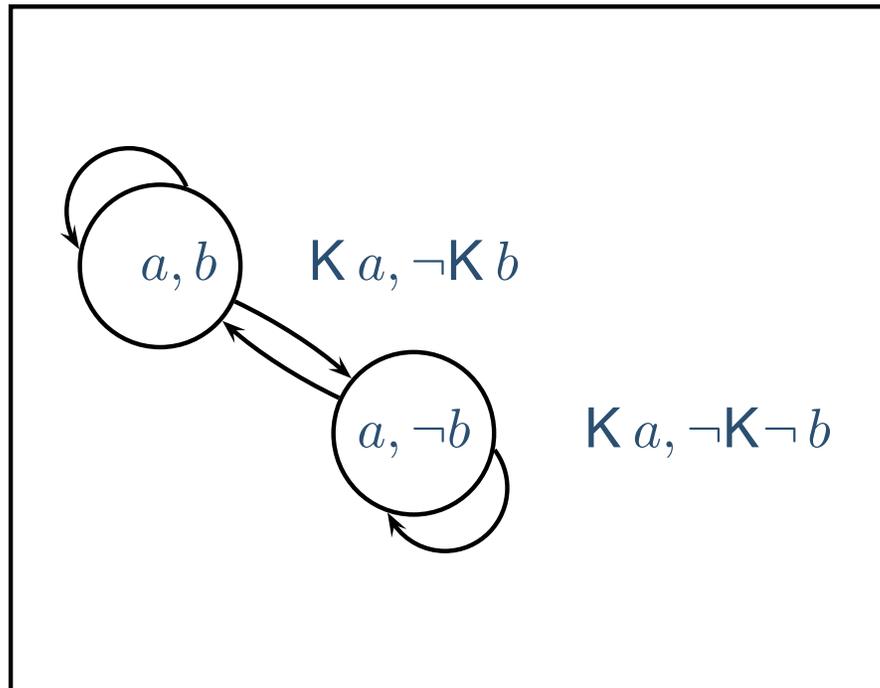
Conhecimento e Tempo

Conclusões

Semântica baseada em estruturas de Kripke

$$M = \langle W, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n, \pi \rangle$$

onde W é um conjunto de mundos; \mathcal{K}_i são relações de equivalência; e $\pi : W \times \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$ é uma função.



Resolução

Clausal: transformação elimina o aninhamento de operadores modais.

Inicial

$$\text{start} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

K_i

$$\text{true} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r m_{i_b}$$

Literais

$$\text{true} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

Regras de Inferência

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[MRES1]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee m_i) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee \neg m_i) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES2]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee K_i l) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee K_i \neg l) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

Regras de Inferência

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Resolução

● Regras de Inferência

● Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[MRES3]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee \mathbf{K}_i l) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee \neg l) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES4]} \quad \square^* (\text{true} \rightarrow (D \vee \neg \mathbf{K}_i l)) \\ \square^* (\text{true} \rightarrow (D' \vee l)) \\ \hline \square^* (\text{true} \rightarrow (D \vee \neg \mathbf{K}_i \neg D')) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES5]} \quad \text{true} \rightarrow (L \vee \mathbf{K}_i l_1 \vee \mathbf{K}_i l_2 \vee \dots) \\ \hline \text{true} \rightarrow (L \vee l_1 \vee l_2 \vee \dots) \end{array}$$

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Resolução
- Regras de Inferência
- Exemplo

Conhecimento e Tempo

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow (K_1 K_2 a \rightarrow K_1 K_2 b)$$

- | | | | | | |
|-----|--------------|---------------|--|---------|--|
| 1. | start | \rightarrow | x | | |
| 2. | true | \rightarrow | $\neg x \vee K_1 y$ | | |
| 3. | true | \rightarrow | $\neg y \vee K_2 z$ | | |
| 4. | true | \rightarrow | $\neg z \vee \neg a \vee b$ | | |
| 5. | true | \rightarrow | $\neg x \vee K_1 t$ | | |
| 6. | true | \rightarrow | $\neg t \vee K_2 a$ | | |
| 7. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_1 \neg r$ | | |
| 8. | true | \rightarrow | $\neg r \vee \neg K_2 b$ | | |
| 9. | true | \rightarrow | $\neg r \vee \neg K_2 z \vee \neg K_2 a$ | [8, 4, | |
| 10. | true | \rightarrow | $\neg r \vee \neg K_2 z \vee \neg t$ | [9, 6, | |
| 11. | true | \rightarrow | $\neg r \vee \neg y \vee \neg t$ | [10, 3, | |
| 12. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_1 y \vee \neg K_1 t$ | [11, 7, | |
| 13. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_1 y$ | [12, 5, | |
| 14. | true | \rightarrow | $\neg x$ | [13, 2, | |
| 15. | start | \rightarrow | false | [14, 1, | |

Semântica

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

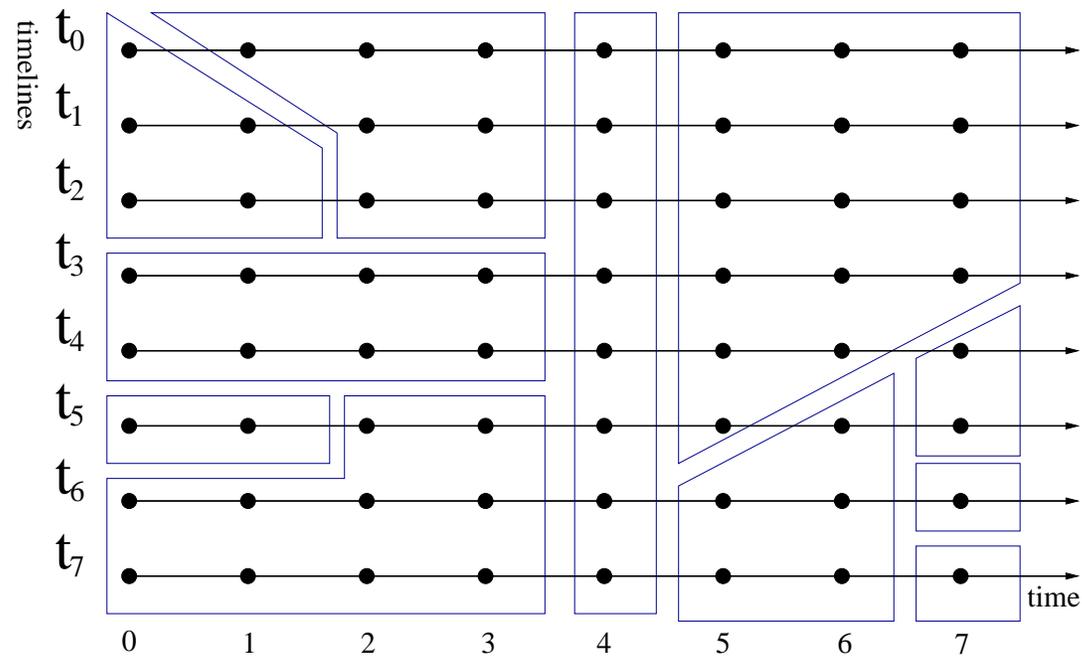
Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

● Semântica

● Exemplo

Conclusões



Um *modelo* é uma estrutura $M = \langle TL, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n, \pi \rangle$ onde:

- $TL \subseteq TLines$ é um conjunto de retas temporais com t_0 ;
- \mathcal{K}_i , para todo $i \in \mathcal{A}$, é a relação de acessibilidade sobre pontos, i.e., $\mathcal{K}_i \subseteq Points \times Points$ onde \mathcal{K}_i é uma relação de equivalência;
- π é uma função $\pi : Points \times \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$.

Exemplo

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

● Semântica

● Exemplo

Conclusões

$$K_i \diamond \varphi \wedge K_i \neg \varphi \rightarrow K_i \bigcirc \diamond \varphi$$

- | | | | | | | | | |
|-----|--------------|---------------|--------------------------------|-----|--------------|---------------|---|-----|
| 1. | start | \rightarrow | x | 11. | z | \rightarrow | $\bigcirc \neg \varphi$ | [6, |
| 2. | true | \rightarrow | $\neg x \vee K_i y$ | 12. | z | \rightarrow | $\bigcirc t$ | [6, |
| 3. | y | \rightarrow | $\diamond \varphi$ | 13. | z | \rightarrow | $\bigcirc (t \wedge \neg \varphi)$ | [11 |
| 4. | true | \rightarrow | $\neg x \vee K_i \neg \varphi$ | 14. | t | \rightarrow | $\bigcirc (t \wedge \neg \varphi)$ | [9, |
| 5. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_i \neg z$ | 15. | y | \rightarrow | $\neg (z \vee t) \mathcal{W} \varphi$ | [13 |
| 6. | z | \rightarrow | $\bigcirc w$ | 16. | true | \rightarrow | $\neg y \vee \neg z \vee \varphi$ | [15 |
| 7. | true | \rightarrow | $\neg w \vee \neg \varphi$ | 17. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_i y \vee \neg K_i \neg \varphi$ | [16 |
| 8. | true | \rightarrow | $\neg w \vee t$ | 18. | true | \rightarrow | $\neg x \vee \neg K_i y$ | [17 |
| 9. | t | \rightarrow | $\bigcirc \neg \varphi$ | 19. | true | \rightarrow | $\neg x$ | [18 |
| 10. | t | \rightarrow | $\bigcirc t$ | 20. | start | \rightarrow | false | [19 |

Resultados

● Provas em Sistemas Modais

Motivação

Overview

Lógica Proposicional

Lógica Temporal

Lógica de Conhecimento

Conhecimento e Tempo

Conclusões

● Resultados

- Terminação, Consistência e Completude;
- Lógicas que admitem interações:

$$\bigcirc K_i \varphi \rightarrow K_i \bigcirc \varphi$$